

Exponencial de Matrices, respuesta temporal $dx/dt=Ax$

© 2019, Antonio Sala Piqueras. Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

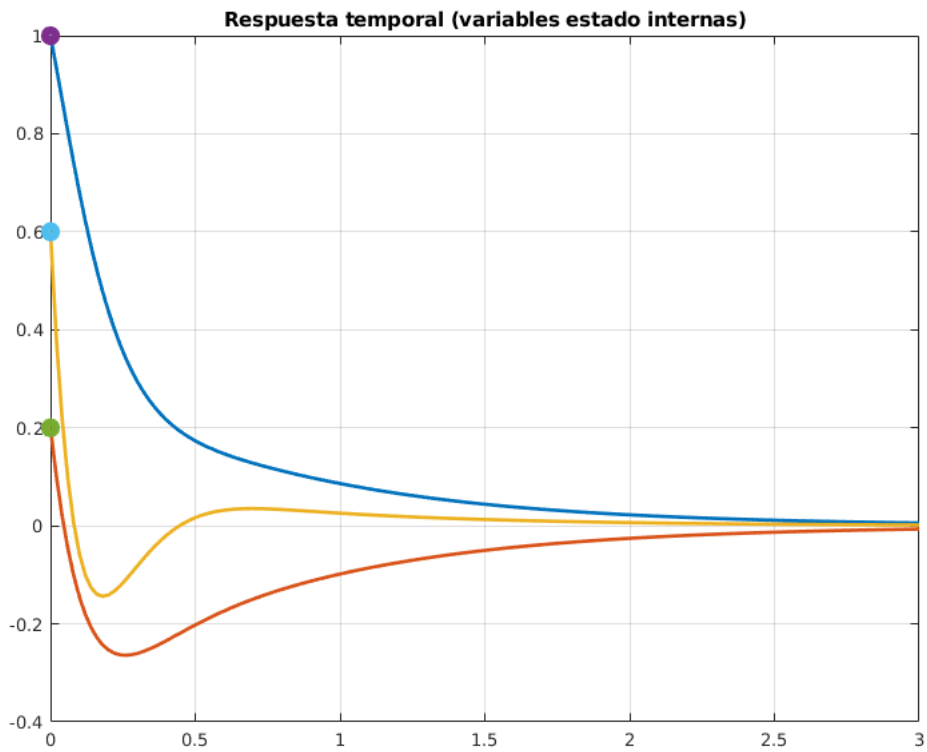
Vídeo-presentación en <http://personales.upv.es/asala/YT/V/rtssml.html>

1. Cálculo numérico de la exponencial: representación gráfica de respuesta libre

```
%matriz del sistema dxdt=Ax:
A=[-4.5 -2 3;-4 -5 -0.5;-6 -7 -8];
%condición inicial para simulaciones (arbitraria):
x0=[1;0.2;0.6];
```

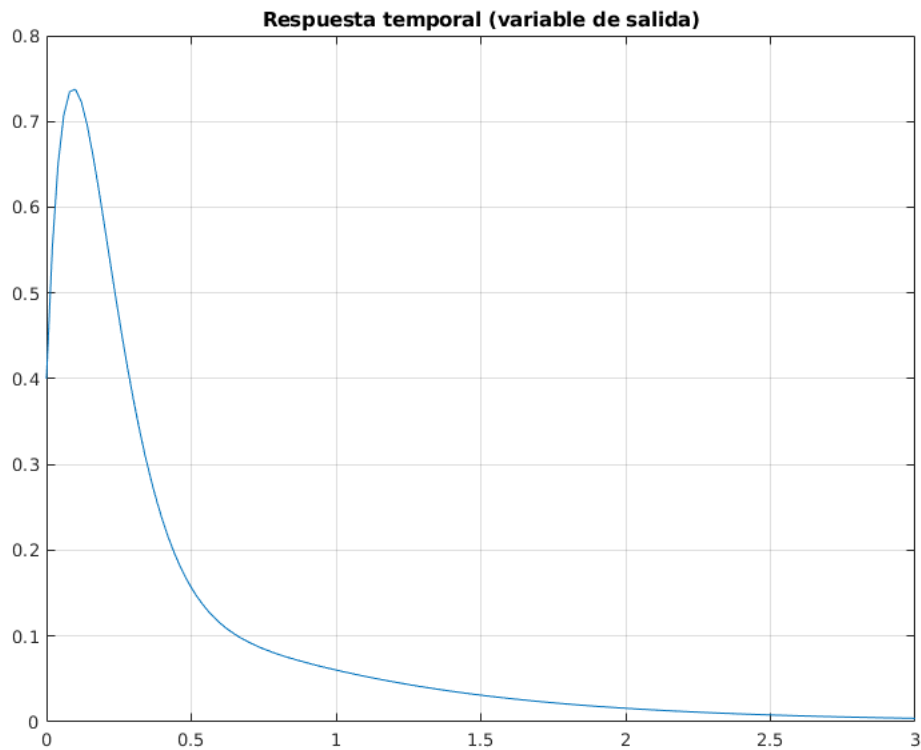
Simulación exacta (NO hay integración numérica Euler/Runge-Kutta)

```
tiempos=0:0.02:3;
Nmuestras=length(tiempos);
estados=zeros(3,Nmuestras);
for muestra=1:Nmuestras
    estados(:,muestra)=expm(A*tiempos(muestra))*x0;
end
plot(tiempos,estados,'LineWidth',2)
hold on
plot(0,x0,'o','LineWidth',5)
hold off
grid on
title('Respuesta temporal (variables estado internas)')
```



Simulación de una ecuación de salida: $y=Cx$

```
C=[1 0 -1];
plot(tiempos,C*estados)
grid on
title('Respuesta temporal (variable de salida)')
```



2. Cálculo simbólico: fórmula explícita de la respuesta temporal

```
syms lambda omega alpha t real
%syms t real
jojo=[alpha -omega;omega alpha]
```

jojo =

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$$

```
eig(jojo)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} \alpha - \omega i \\ \alpha + \omega i \end{pmatrix}$$

```
simplify(expm(jojo*t), 'Criterion', 'preferReal', 'Steps', 40)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos(\omega t) & -e^{\alpha t} \sin(\omega t) \\ e^{\alpha t} \sin(\omega t) & e^{\alpha t} \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

```
J=[lambda 1 0;0 lambda 1;0 0 lambda]
```

J =

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

```
expm(J*t)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

```
%Matlab sabe hacerla esta exponencial... o casi  
tic, otracosa=simplify(expm(A*t)), toc
```

otracosa =

$$\left(\frac{\sqrt{3} (18 \sqrt{4607777} \sigma_{18} |t|^3 \sigma_{20}^{8/3} - 4633527827941788 \sqrt{3} t^{11} \sigma_{18} - 3738752157096 \sqrt{4607777} t^2 \sigma_{18}}{\right.$$

where

$$\sigma_1 = (t^6)^{3/2}$$

$$\sigma_2 = 904680 \sqrt{13823331} t^3 \sigma_{15} \sin(\sigma_{16}) |t|^3 \sigma_{20}^{5/3}$$

$$\sigma_3 = 904680 \sqrt{4607777} t^3 \sigma_{15} \cos(\sigma_{16}) |t|^3 \sigma_{20}^{5/3}$$

$$\sigma_4 = 504 \sqrt{4607777} \sigma_{18} |t|^3 \sigma_{20}^{8/3}$$

$$\sigma_5 = 1873536 t^3 \sigma_{15} \sin(\sigma_{16}) \sigma_{20}^{8/3}$$

$$\sigma_6 = 1120999040 \sqrt{3} t^6 \sigma_{15} \cos(\sigma_{16}) \sigma_{20}^{5/3}$$

$$\sigma_7 = 3362997120 t^6 \sigma_{15} \sin(\sigma_{16}) \sigma_{20}^{5/3}$$

$$\sigma_8 = 624512 \sqrt{3} t^3 \sigma_{15} \cos(\sigma_{16}) \sigma_{20}^{8/3}$$

$$\sigma_9 = 504 \sqrt{13823331} \sigma_{15} \sin(\sigma_{16}) |t|^3 \sigma_{20}^{8/3}$$

$$\sigma_{10} = 504 \sqrt{4607777} \sigma_{15} \cos(\sigma_{16}) |t|^3 \sigma_{20}^{8/3}$$

$$\sigma_{11} = 904680 \sqrt{4607777} t^3 \sigma_{18} |t|^3 \sigma_{20}^{5/3}$$

$$\sigma_{12} = 14832 t \sigma_{17} \sigma_{20}^{4/3}$$

$$\sigma_{13} = 1120999040 \sqrt{3} t^6 \sigma_{18} \sigma_{20}^{5/3}$$

$$\sigma_{14} = 624512 \sqrt{3} t^3 \sigma_{18} \sigma_{20}^{8/3}$$

$$\sigma_{15} = e^{-\frac{70 t \sigma_{20}^{1/3} - 35 t^2 + \sigma_{20}^{2/3}}{\sigma_{19}}}$$

Elapsed time is 23.525812 seconds.

%con un poco de ayuda tarda mucho menos y está todo más claro:

```
[V,D]=eig(A);
```

```
D
```

```
D =  
-8.0755 + 4.2425i    0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i  
 0.0000 + 0.0000i   -8.0755 - 4.2425i    0.0000 + 0.0000i  
 0.0000 + 0.0000i    0.0000 + 0.0000i   -1.3489 + 0.0000i
```

```
Vs=vpa(V,6);Ds=vpa(D,6);
```

```
tic,exponencialdeAt=simplify(Vs*expm(Ds*t)*inv(Vs)),toc
```

```
exponencialdeAt =
```

$$\begin{pmatrix} 0.32861215197687464287702297856175 e^{-1.3489463350099697436235146597028 t} + 0.671387848023125357122 i \\ 0.37321367030221107943217828836573 e^{-8.0755268324949156522052362561226 t} \cos(4.24251832402819673006 t) \\ 0.0963490617475241671118467689035934 e^{-1.3489463350099697436235146597028 t} - 0.096349061747524167111 i \end{pmatrix}$$

Elapsed time is 0.294173 seconds.

vpa(exponencialdeAt*x0,4) %salen todos números reales excepto errores de redondeo:

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} 0.3335 e^{-1.349 t} + 0.6665 e^{-8.076 t} \cos(4.243 t) + 0.6439 e^{-8.076 t} \sin(4.243 t) \\ 0.5788 e^{-8.076 t} \cos(4.243 t) - 0.3788 e^{-1.349 t} - 0.268 e^{-8.076 t} \sin(4.243 t) \\ 0.09779 e^{-1.349 t} + 0.5022 e^{-8.076 t} \cos(4.243 t) - 1.889 e^{-8.076 t} \sin(4.243 t) \end{pmatrix}$$

Ecuación de salida:

```
vpa(C*exponencialdeAt*x0,4)
```

```
ans = 0.2357 e^{-1.349 t} + 0.1643 e^{-8.076 t} \cos(4.243 t) + 2.533 e^{-8.076 t} \sin(4.243 t)
```