

Resolución con desigualdades matriciales lineales (LMI) del problema de control óptimo LQR para proceso lineal

© 2020, Antonio Sala Piqueras, Universitat Politècnica de València. Todos los derechos reservados.

Presentación en vídeo: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/lqrlmi.html>

Este código funcionó correctamente con Matlab R2020a, SeDuMi1.3, YalmipR20200116 (*tbxmanager*)

Objetivo: Revisar la teoría que plantea las LMIs en control óptimo lineal y comprobar que su solución coincide con el comando `lqr` de Matlab (basado en ecuación de Riccati).

Tabla de Contenidos

1. Revisión teórica rápida.....	1
2. Ejemplo numérico.....	2
Conclusiones.....	3

1. Revisión teórica rápida

El objetivo del control LQR es minimizar $J(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt$ mediante un controlador $u(x)$. Es un problema bien estudiado en el caso lineal desde los años 1950.

Si se cumple esta desigualdad (escalar)

$$\dot{V} + x^T Q x + u^T R u \leq 0 \quad (1)$$

entonces, integrando entre 0 y T tenemos :

$$V(T) - V(0) + \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \leq 0$$

$$V(T) + \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \leq V(0)$$

O sea, con $V(t) = x(t)^T P x(t)$, y $P \geq 0$, entonces $V(T) \geq 0$ y tendríamos, para cualquier T :

$$\int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \leq x(T)^T \cdot P \cdot x(T) + \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \leq x_0^T P x_0$$

esto es, que $x^T P x$ es una cota superior (coste garantizado) del índice del LQR. El objetivo del control óptimo es obtener la "mínima" P que verifique lo anterior (la cota superior más baja posible).

Como $V(t) = x(t)^T P x(t)$, su derivada es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dx^T}{dt} P x + x^T P \frac{dx}{dt}$$

Escribiendo la desigualdad (1) con el modelo $\dot{x} = Ax + Bu$, sale:

$$x^T P(Ax + Bu) + (Ax + Bu)^T Px + x^T Qx + u^T Ru \leq 0$$

Hacemos el cambio de variable $Px = \xi$, y siendo $P^{-1} = X$, tenemos $x = P^{-1}\xi = X\xi$. Asimismo proponemos una realimentación del estado $u = -Kx = -KX\xi$ y denominemos $F = KX$, o el cambio inverso $FP = K$.

Con ello resulta:

$$\xi^T (AX\xi - BF\xi) + \xi^T (XA^T - F^T B^T)\xi + \xi^T XQX\xi + \xi^T F^T RF\xi \leq 0 \quad (2)$$

Podríamos cambiar $\leq$ por $=$ (en eso se basa el enfoque usual de ecuación de Riccati), que es la forma no-LMI de resolver el problema y también existe una solución de X y F .

Pero, alternativamente, la expresión (2) anterior se puede escribir como:

$$\xi^T \left((AX - BF + XA^T - F^T B^T) + (X \ F^T) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ F \end{pmatrix} \right) \xi \leq 0$$

Aplicando la fórmula del complemento de Schur, que dice que, si asumimos $H > 0$,

$$\begin{pmatrix} M & N^T \\ N & -H^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0 \quad \Leftrightarrow \quad M + N^T H N \preceq 0$$

haciendo

$$M := AX - BF + XA^T - F^T B^T, \quad N = \begin{pmatrix} X \\ F \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

se cumple (suponiendo $Q > 0$, $R > 0$) sii:

$$\begin{pmatrix} AX - BF + XA^T - F^T B^T & X & F^T \\ X & -Q^{-1} & 0 \\ F & 0 & -R^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0$$

Esto es una desigualdad matricial lineal en las variables de decisión X y F que puede ser fácilmente resuelta numéricamente.

2. Ejemplo numérico

Comprobemos que la solución de este problema LMI (minimizar P es ahora maximizar su inversa X , en concreto maximizaremos su traza) es igual al LQR.

```
A=[-4 2 0 -1; 0 2 -1 -1; .1 .1 -.2 -1; -1 -1 -1 0];
B=[-.1;2;0;0];
Q=diag([1 .8 .6 .2]); R=.4;
```

El LQR resulta en:

```
tic, [K,P]=lqr(A,B,Q,R), toc
```

```
K = 1x4
    0.9412    4.1470    2.7771   -4.3948
```

```
P = 4x4
    0.2200    0.1992    0.4467   -0.5127
    0.1992    0.8394    0.5778   -0.9046
    0.4467    0.5778    2.6265   -2.3455
   -0.5127   -0.9046   -2.3455    2.6047
Elapsed time is 0.006639 seconds.
```

Las LMIs que resuelven el problema LQR son (Yalmip):

```
X=sdpvar(4); %simétrica
F=sdpvar(1,4); %no simétrica
LMI1= [A*X-B*F+X*A'-F'*B' X F';...
      X -inv(Q) zeros(4,1); ...
      F zeros(1,4) -inv(R) ]<=0;
LMI2= X>=0;
```

Cuya solución:

```
tic, sol=optimize([LMI1 LMI2],-trace(X),sdpsettings('verbose',0)), toc
```

```
sol = struct with fields:
  yalmipversion: '20200116'
  yalmiptime: 0.0601
  solvertime: 0.0211
  info: 'Successfully solved (SeDuMi-1.3)'
  problem: 0
Elapsed time is 0.107335 seconds.
```

```
P_lmi=inv(double(X))
```

```
P_lmi = 4x4
    0.2200    0.1992    0.4467   -0.5127
    0.1992    0.8394    0.5778   -0.9046
    0.4467    0.5778    2.6265   -2.3455
   -0.5127   -0.9046   -2.3455    2.6047
```

```
K_lmi=double(F)*P_lmi
```

```
K_lmi = 1x4
    0.9412    4.1470    2.7771   -4.3948
```

Conclusiones

Las soluciones LMI y la clásica ec. de Riccati (1950-60, Bellman, Kalman) coinciden, aunque el comando `lqr` tarda menos tiempo. De todos modos, las LMIs son suficientemente rápidas y permiten generalizaciones muy sencillas a control robusto y planificación de ganancia (que el `lqr` clásico **no** puede abordar).