Reducción de orden: influencia de modos longitudinales en comportamiento de muelles

Objetivo: comprender cómo simplificar un modelo mecánico de alto orden (elementos finitos) de modo que se pierda poca exactitud para su uso posterior.

Presentación en vídeo en: http://personales.upv.es/asala/YT/V/feredm.html

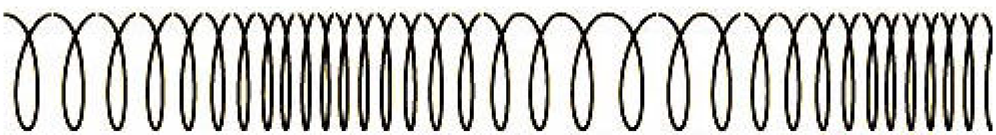
http://personales.upv.es/asala/YT/V/feredm2.html

Table of Contents

1.-Planteamiento del problema y modelado

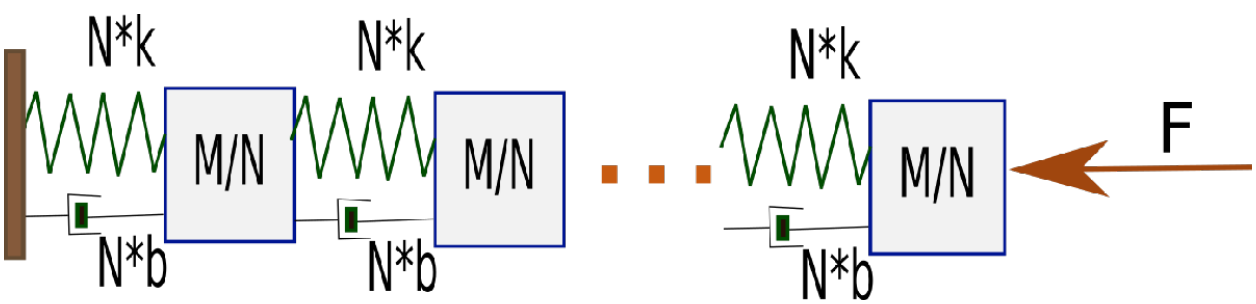
Un muelle no es sólo F=k(x-L), tiene su propia masa y estructura interna.

En concreto, puede presentar modos de vibración longitudinales:



¿Influye esto en las aplicaciones?

Modelemos el muelle, como N segmentos de muelle:



Este tipo de metodologías son la idea que originó el enfoque de "elementos finitos" en mecánica, fluidos, calor, etc. Cuando los elementos son infinitesimales, se llega a una ecuación en derivadas parciales (si no hay rozamiento, a la ecuación de onda unidimensional,https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento incremental sobre su posición natural del elemento que en el muelle sin carga estaría en la posición x.

Las ecuaciones (linealizadas, eliminando longitud natural) de la cadena de N masas-muelle-amortiguador está modelada en la función auxiliar **`modelobarra`** al final de este fichero.

El orden del sistema es $2N$: las variables de estado son N posiciones y N velocidades.

2.-Estudio numérico de un ejemplo concreto

```
Mtotal=.1;
Ktotal=250;  %constante elástica de la barra.
friccion_tot=0.4; %fricción
```

Modelado como 40 elementos:

```
barra40=modelobarra(40,Ktotal,Mtotal,friccion_tot);
size(barra40)
```

```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 80 states.
```

***Utilización (formalmente incorrecta) de minreal**

Importante: minreal es para corregir modelos mal planteados o mal manipulados. Este modelo está correcto y todos los estados son formalmente observables y controlables... Minreal no deberíae hacer nada... pero con la tolerancia por defecto ya hace algo porque este modelo es tan "poco" observable **O** controlable que ya "dispara". Pero minreal no es la vía formalmente correcta de reducir orden en un modelo correctamente planteado; además, el resultado depende de tolerancias y cambios de variable en la realización **(no es "equilibrada": balred reduce estados poco observables Y controlables)**.

```
size(minreal(barra40))
```

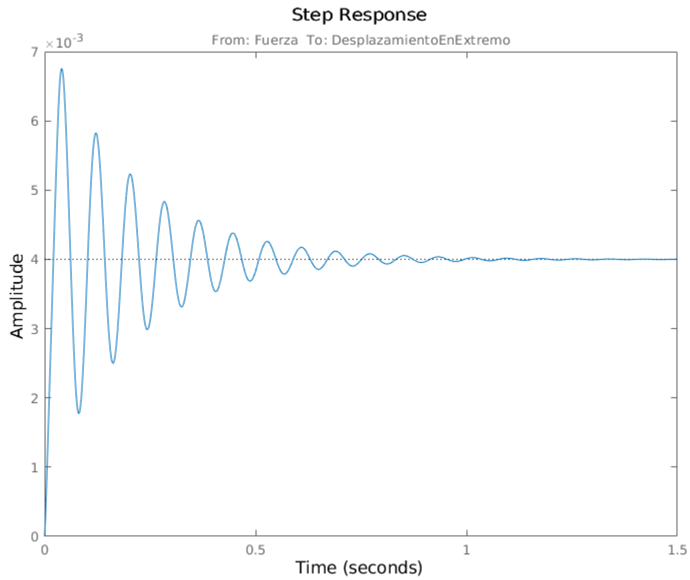
```
28 states removed.
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 52 states.
```

```
size(minreal(barra40,2e-11))
```

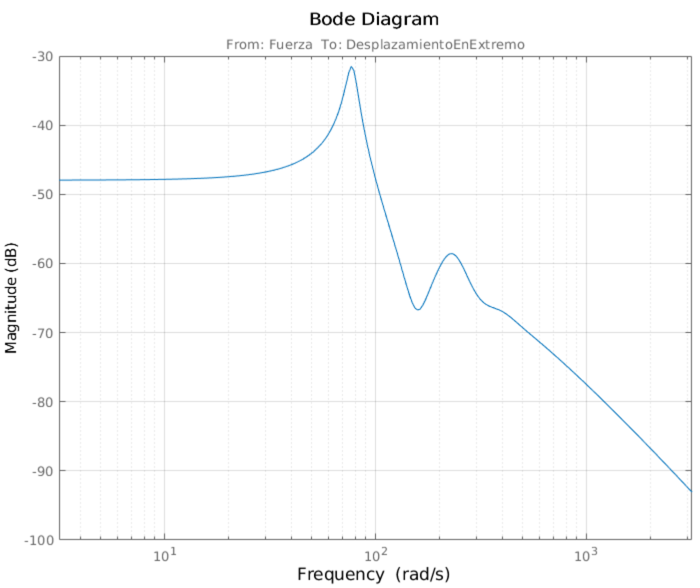
```
14 states removed.
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 66 states.
```

2.1-Respuesta temporal/frecuencia del modelo de muelle (sin carga adicional)

```
step(barra40,1.5)
```




```
bodemag(barra40,logspace(0.5,3.5,250))
grid on
```

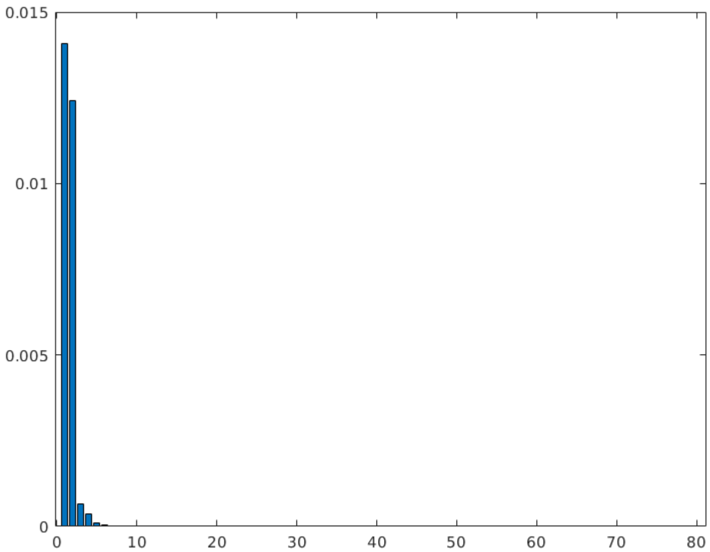


2.2-Reducción basada en realización equilibrada del modelo de orden 80 (40 elementos)

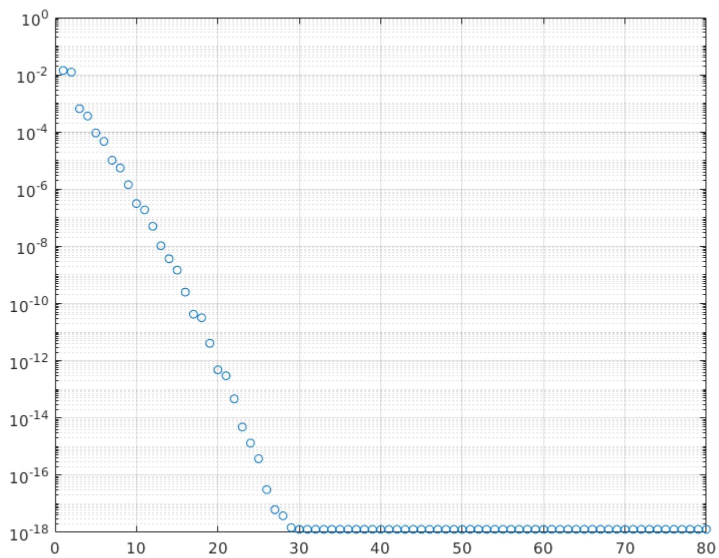
```
[gg,baldata]=hsvd(barra40);
gg'
```

```
ans = 1×80
    0.0141    0.0124    0.0007    0.0004    0.0001    0.0000    0.0000    0.0000 ···
```

```
bar(gg)
```




```
semilogy(gg,'o'),grid on
```



Nota: es tan poco controlable/observable que llegamos al límite de precisión numérica.

Hagamos la reducción a orden 2 y 4 equilibrada.

```
reducido2=balred(barra40,2,baldata);
zpk(reducido2)
```

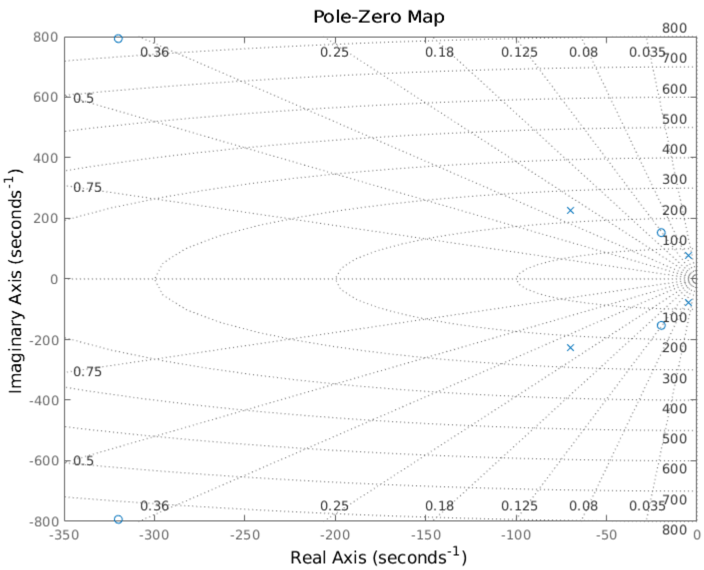
```
ans =

  From input "Fuerza" to output "DesplazamientoEnExtremo":
  0.00066281 (s^2 + 12.99s + 3.629e04)
  ------------------------------------
         (s^2 + 9.788s + 6013)
```

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
reducido4=balred(barra40,4,baldata);
zpk(reducido4)
```

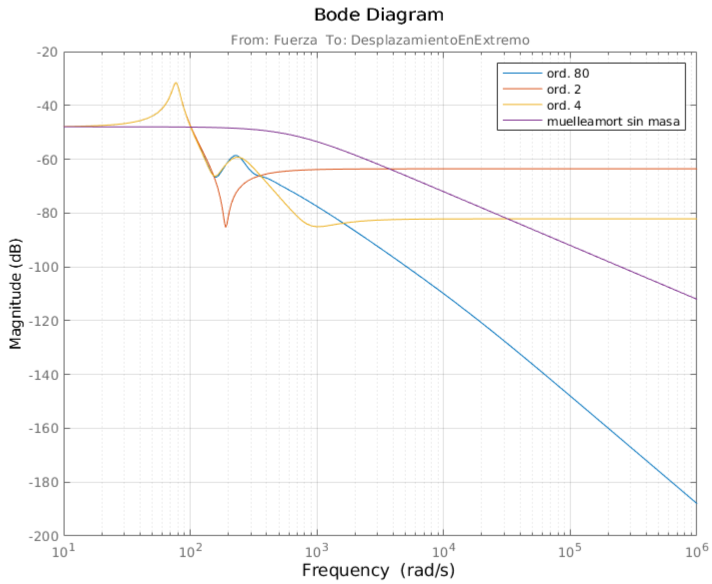
```
ans =
 
  From input "Fuerza" to output "DesplazamientoEnExtremo":
  7.7961e-05 (s^2 + 39.44s + 2.383e04) (s^2 + 640s + 7.318e05)
  ------------------------------------------------------------
        (s^2 + 9.646s + 6018) (s^2 + 139.6s + 5.649e04)
 
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
pzmap(reducido4), grid on
```

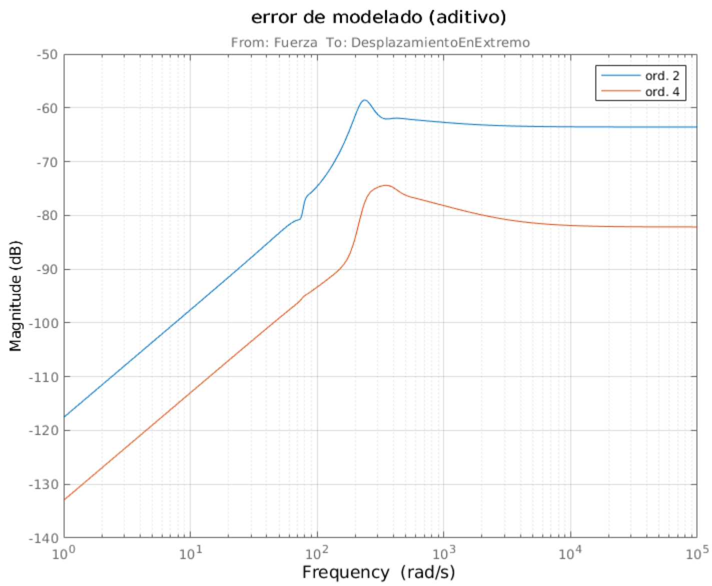


Comparemos también con el modelo muelle-amortiguador que descartara su masa y modos longitudinales, $F = (K + fs) * x$

```
s=tf('s');
Muelleamortiguador_sinmasa=1/(Ktotal+friccion_tot*s);
bodemag(barra40,reducido2,reducido4,Muelleamortiguador_sinmasa), grid on
legend('ord. 80','ord. 2','ord. 4','muelleamort sin masa')
```




```
err2=barra40-reducido2;
err4=barra40-reducido4;
bodemag(err2,err4), grid on
legend('ord. 2','ord. 4'), title('error de modelado (aditivo)')
```



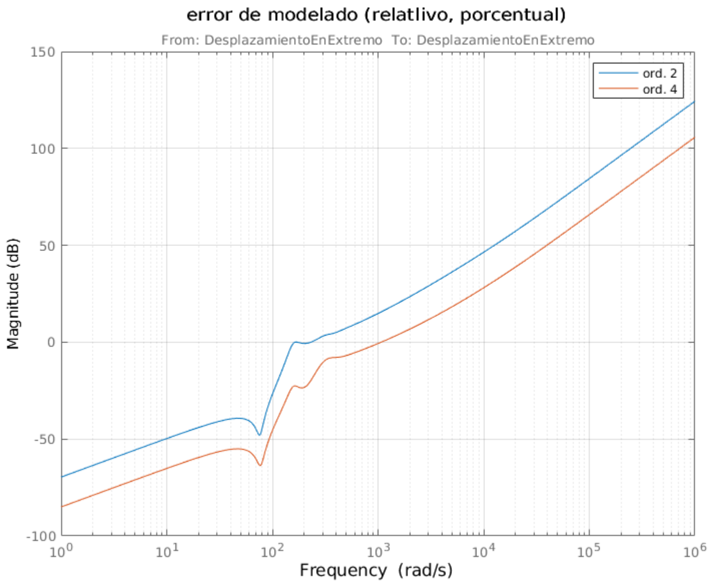

```
norm(err2,Inf) %pico del error en frecuencia
```

```
ans = 0.0012
```

```
norm(err4,Inf)
```

```
ans = 1.9025e-04
```

```
bodemag(err2/barra40,err4/barra40), grid on
legend('ord. 2','ord. 4'), title('error de modelado (relatlivo, porcentual)')
```



2.3-Reducción basada en la separación de frecuencias (modal)

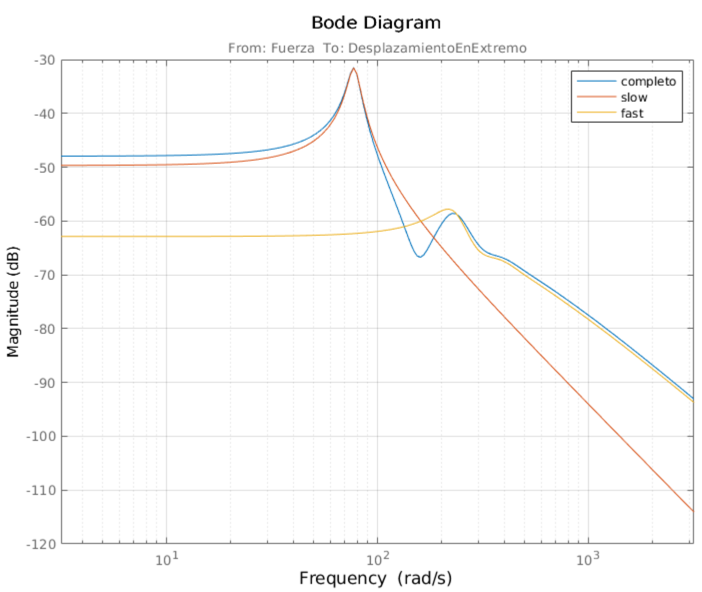
```
[Gslow,Gfast]=freqsep(barra40,100);
size(Gslow)
```

```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 2 states.
```

```
size(Gfast)
```

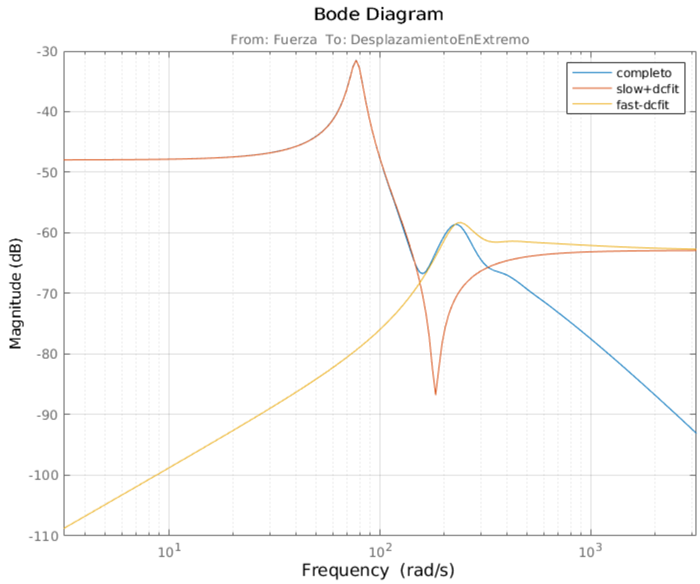
```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 78 states.
```

```
bodemag(barra40,Gslow,Gfast,logspace(0.5,3.5,200)), grid on
legend('completo','slow','fast')
```

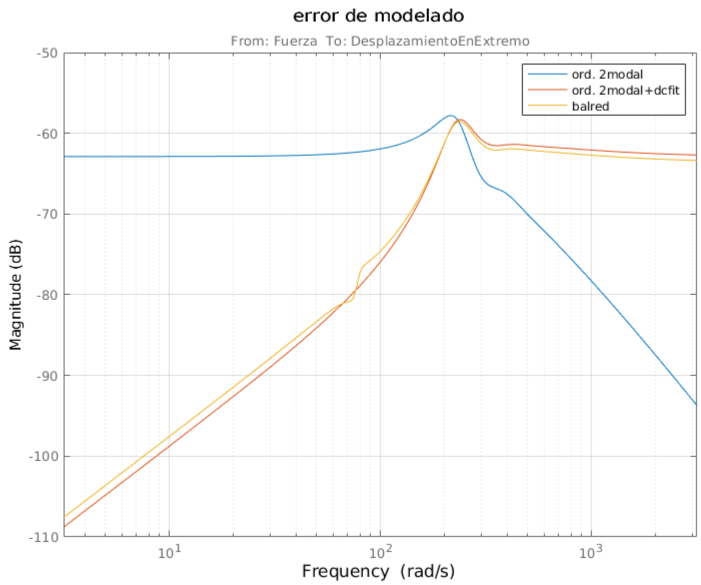



```
bodemag(barra40,Gslow+dcgain(Gfast),Gfast-dcgain(Gfast),logspace(0.5,3.5,200)),grid on
```

```
legend('completo','slow+dcfit','fast-dcfit')
```




```
errslow=barra40-Gslow;
errslow_dc=barra40-Gslow-dcgain(Gfast);
bodemag(errslow,errslow_dc,err2,logspace(0.5,3.5,200)), grid on
legend('ord. 2modal','ord. 2modal+dcfit','balred'), title('error de modelado')
```




```
norm(errslow,Inf)
```

```
ans = 0.0013
```

```
norm(errslow_dc,Inf)
```

```
ans = 0.0012
```

3.-Utilización del modelo reducido del muelle como subsistema

Vamos a "cargar" el muelle con un objeto de masa M_2, y ejercer una fuerza F_2 sobra la masa grande M_2.

Plantearemos las ecuaciones y veremos si todavía se puede reducir la complejidad del sistema más.

Las ecuaciones combinadas serán: $M_2 \dfrac{d^2 p}{dt^2} = F_2 - F_{muelle}$, junto con la dinámica entre la posición "p" y la fuerza del muelle anterior.

En Trans. Laplace: $M_2 \cdot s^2 \cdot p(s) = (F_2(s) - F_{muelle}(s))$, $p(s) = G_{muelle}(s) * F_{muelle}(s)$, con lo que resulta $(M_2 \cdot s^2 + G_{muelle}^{-1}(s)) \cdot p(s) = F_2(s)$

esto es, una FdT entre fuerza y posición dada por:

$$p(s) = \frac{1}{(M_2 \cdot s^2 + G_{muelle}^{-1}(s))} F_2(s)$$

```
M2=0.06;%probar con 0.06 [comparable a la del muelle] y con 1.2 Kg [mucho mayor que la
ModeloTotalconmuellesinmasa=minreal(inv(M2*s^2+inv(Muelleamortiguador_sinmasa)))
```

```
ModeloTotalconmuellesinmasa =

          16.67
  --------------------
  s^2 + 6.667 s + 4167

Continuous-time transfer function.
```

```
size(ss(ModeloTotalconmuellesinmasa))
```

```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 2 states.
```

```
ModeloTotalconmuelleorden2=minreal(inv(M2*s^2+inv(reducido2)));
```

```
2 states removed.
```

```
size(ModeloTotalconmuelleorden2)
```

```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 4 states.
```

```
ModeloTotalconmuelleorden4=minreal(inv(M2*s^2+inv(reducido4)));
```

```
2 states removed.
```

```
%aquí minreal sí está indicado, para eliminar errores de redondeo en manipulaciones
size(ModeloTotalconmuelleorden4)
```

```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 6 states.
```

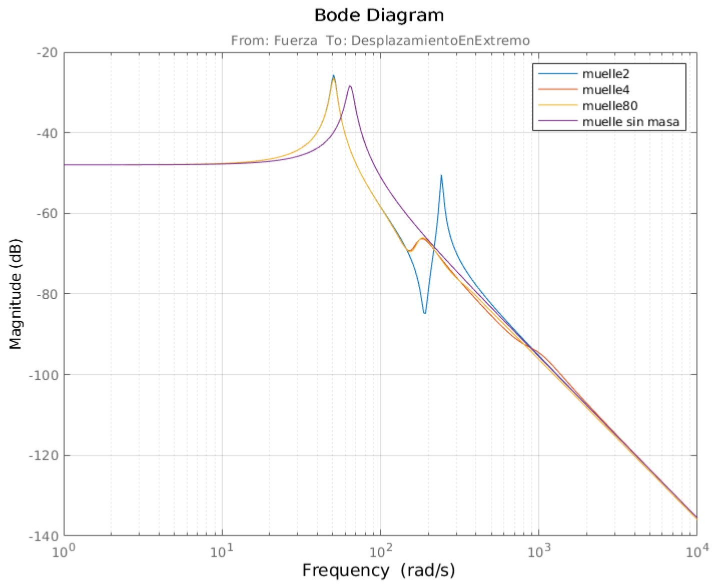
```
ModeloTotalconmuelleorden80=minreal(inv(M2*s^2+inv(barra40))); %manejar sistemas de orc
```

```
8 states removed.
```

```
size(ModeloTotalconmuelleorden80)
```

```
State-space model with 1 outputs, 1 inputs, and 77 states.
```

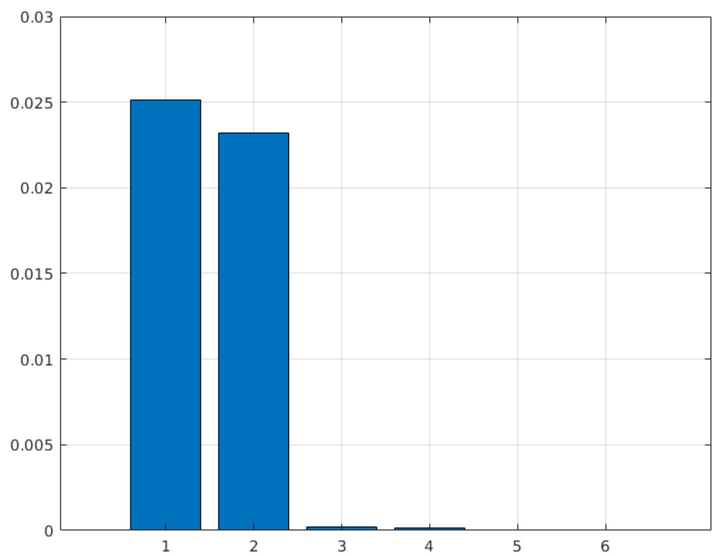
```
bodemag(ModeloTotalconmuelleorden2,ModeloTotalconmuelleorden4,ModeloTotalconmuelleorder
legend('muelle2','muelle4','muelle80','muelle sin masa')
```




```
[gg2,baldata2]=hsvd(ModeloTotalconmuelleorden4);
gg2'
```

```
ans = 1×6
    0.0252    0.0232    0.0002    0.0001    0.0000    0.0000
```

```
bar(gg2),grid on
```

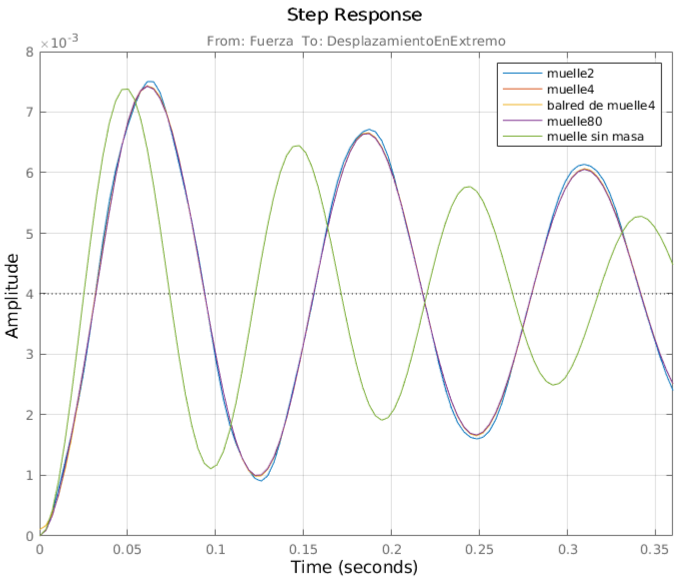


Parece que podemos eliminar dos de los cuatro estados... todo parece un masa-muelle de orden 2:

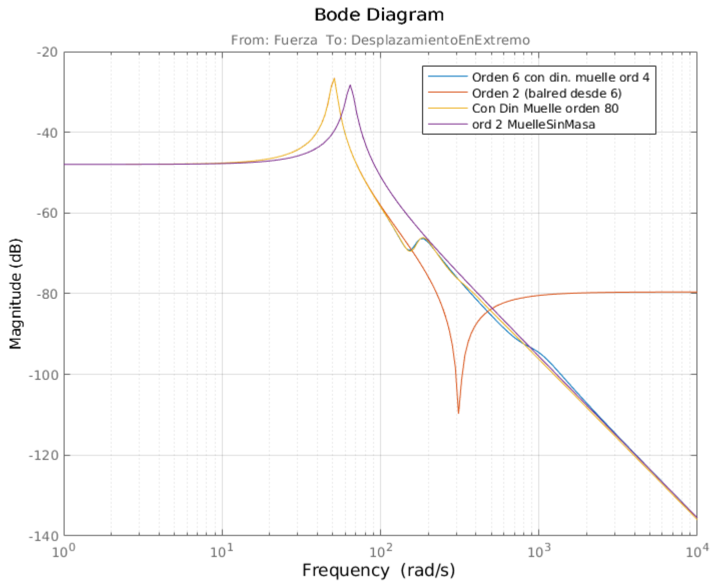
```
ModeloTotalRed=balred(ModeloTotalconmuelleorden4,2,baldata2);
zpk(ModeloTotalRed)
```

```
ans =

  From input "Fuerza" to output "DesplazamientoEnExtremo":
  0.00010528 (s^2 + 8.672s + 9.769e04)
  ------------------------------------
         (s^2 + 4.087s + 2571)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
step(ModeloTotalconmuelleorden2,ModeloTotalconmuelleorden4,ModeloTotalRed,ModeloTotalco
legend('muelle2','muelle4','balred de muelle4','muelle80','muelle sin masa'), grid on
```

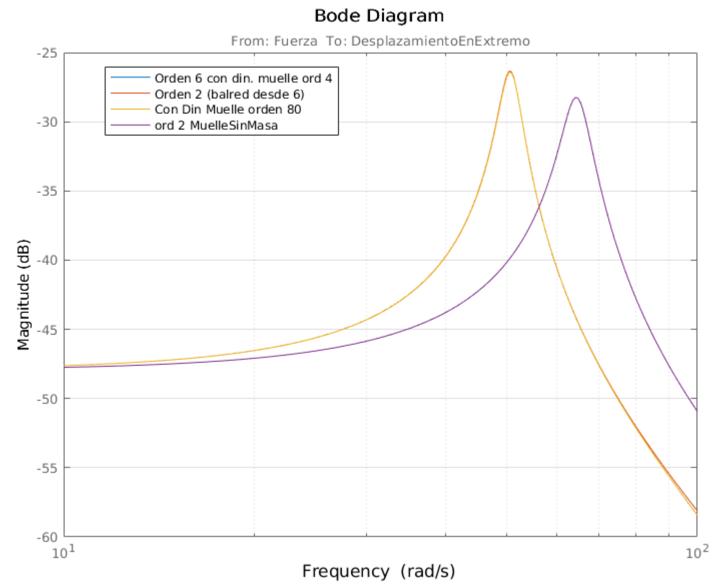



```
bodemag(ModeloTotalconmuelleorden4,ModeloTotalRed,ModeloTotalconmuelleorden80,ModeloTot
legend('Orden 6 con din. muelle ord 4','Orden 2 (balred desde 6)','Con Din Muelle order
```



Comparemos con el modelo más sencillo de no haber considerado NADA de dinámica del muelle:

```
bodemag(ModeloTotalconmuelleorden4,ModeloTotalRed,ModeloTotalconmuelleorden80,ModeloTot
legend('Orden 6 con din. muelle ord 4','Orden 2 (balred desde 6)','Con Din Muelle order
```



Apéndice: funciones auxiliares

```
function sys=modelobarra(N,Ktotal, Mtotal, ftotal)
M=Mtotal/N;
K=Ktotal*N;f=ftotal*N;
%esto conserva las relaciones con fuerza de posición y velocidad suponiendo que cada el
%1/N veces lo que se mueve todo el muelle.
```

```
%estado 2N son [posiciones;velocidades];
A=zeros(N*2,N*2);
%entrada es fuerza extremo derecho (N)
B=zeros(N*2,1);
B(2*N)=1/M;
%salida es posición de la punta
C=zeros(1,N*2);
C(N)=1;
%deriv posicion son velocidades:
A(1:N,(N+1):(2*N))=eye(N);
%las aceleraciones tienen las ecuaciones siguientes:
for i=1:N
    if(i==1) %elemento pegado al extremo fijo
        A(N+i,i)=-2*K/M;
        A(N+i,N+i)=-2*f/M;
        A(N+i,i+1)=K/M;
        A(N+i,N+i+1)=f/M;
    elseif(i<N) %elementos intermedios
        A(N+i,i)=-2*K/M;
        A(N+i,N+i)=-2*f/M;
        A(N+i,i+1)=K/M;
        A(N+i,N+i+1)=f/M;
        A(N+i,i-1)=K/M;
        A(N+i,N+i-1)=f/M;
    else %i==N, extremo donde se aplica fuerza
        A(N+i,i)=-K/M;
        A(N+i,N+i)=-f/M;
        A(N+i,i-1)=K/M;
        A(N+i,N+i-1)=f/M;
    end
end
sys=ss(A,B,C,0);
sys.InputName={'Fuerza'};
sys.OutputName={'DesplazamientoEnExtremo'};
end
```