

Representación de sistemas multivariables: matriz de transferencia versus repr. estado, ventajas e inconvenientes

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/mdtvss.html>

Introducción

Motivación: Un sistema monovariable, ante c.i. nulas, en Transformada de Laplace verifica $y(s) = G(s)u(s)$. En caso multivariable, también si y , u son vectores y G es matriz. Es una alternativa a la repr. interna $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$. ¿Cuál es mejor?

Objetivos: Comprender las ventajas e inconvenientes de la representación MdT/estado.

Contenido:

Revisión de definiciones básicas. Ventajas de la MdT respecto a interna. Desventajas de la MdT.

Definiciones básicas

Los modelos entrada-salida de sistemas multivariables lineales relacionan un **vector** de salidas $y(t) \in \mathbb{R}^q$ con un vector de entradas $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Si el sistema es **lineal**, entonces se puede aplicar **superposición**: el efecto combinado sobre una salida y_i (i cualquiera) de todas las entradas es la **suma** de los efectos individuales de cada u_j .

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \dots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \dots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(s) & g_{q2}(s) & \dots & g_{qm}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$y(s)_{q \times 1} = \underbrace{G(s)_{q \times m}}_{\text{Matriz de Transferencia}} \cdot u(s)_{m \times 1}$$



Repr. Interna a MdT

(equivalencia de representaciones)

Sin hacer transf. de Laplace, las ecuaciones de “primeros principios” de un sistema físico realizable suelen poder expresarse como:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du$$

Obviamente, haciendo transformada de Laplace (con c.i. nulas), queda:

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \text{ con lo que } x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

con lo que

$$y(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}_{\text{Matriz de Transferencia}} \cdot u(s)$$

INVERSO (MdT a SS): existen fórmulas sencillas para SISO (1 entr., 1 salida); caso MIMO requiere más complicación conceptual (forma de Brunovski, realización mínima...).

Ventajas de la MdT respecto a “estado”

- **[+]** Derivadas e integrales se sustituyen por multiplicar/dividir por s . Permiten manipular las ecuaciones del proceso con manipulaciones algebraicas (suma, multiplicación, división).
 - En sistemas de ecs. algebraico-diferenciales de “índice superior” la repr. interna necesita hacer derivadas de ecuaciones, no necesarias en el dominio de Laplace: despejar y punto
- **[+]** La representación en Matriz de Transferencia generaliza $y(s) = G(s)u(s)$ con u , y vectores, a partir de la “superposición”.
- **[+]** Interesante para “entender” la respuesta de cada salida ante cada entrada (step, bode, ...), para explicarla a técnicos no expertos en control, para entender las interacciones en forma de diagrama de bloques con elementos sencillos (si hay muchos elementos cero).

Ventajas (II)

- **[+]** Puede identificarse experimentalmente cada término, de forma (aproximadamente) sencilla, independiente del resto.
 - Basada en fórmulas tabuladas (1^{er} orden, 1^{er} orden+retardo, Strej, 2^{o} orden, ...),
 - Basada en optimización numérica (mínimos cuadrados, system ID toolbox, etc.).
- **[+]** En algunos casos, si hay muchos elementos igual a cero, o si reordenando entradas y salidas $G(s)$ es diagonal-dominante (o $\approx$ triangular) se pueden diseñar controladores, p. ej. tipo PID, examinando sólo la diagonal (control **descentralizado**).
IMPORTANTE en la práctica del control industrial.



Desventajas de la MdT respecto a “estado”

- [-] En procesos reales, muchas veces la dinámica es la misma en todos los elementos de la MdT (un fenómeno físico se observa en varios sensores). La ID experimental numérica podría no capturar ese hecho.
- En un circuito RC con 1 condensador pero 2 sensores, el ruido podría identificar una capacidad diferente si estimo la FdT de cada uno por separado. Sería menos sensible a ruido si pudiéramos decir que el “C” en ambas debe coincidir.

$$\begin{pmatrix} V_c(s) \\ i(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.989}{5.32s+1} \\ \frac{0.62s}{5.37s+1} \end{pmatrix} U(s)$$



Desventajas de la representación MdT (II)

- [-] Menos cercana a la “Física”
 - las vbles. de estado son las cargas de condensadores, concentraciones, ... en general, las variables con almacenamientos de masa o energía claves en la dinámica del proceso,
 - La “transformada de Laplace” de unas ecuaciones añade un paso más de “complejidad conceptual”.
 - Pasar de Matriz de Transferencia a representación interna resulta “complicado” conceptualmente: hay fórmulas SISO, pero se obtienen estados “independientes” de cada FdT y luego hay que detectar cuáles son “copias” con análisis de controlabilidad/observabilidad (realización mínima).



Desventajas de la representación MdT (III)

- [-] No recomendable (en principio) para cálculos/diseños de control **centralizado** multivariable, mejor **realización mínima** de modelos en representación interna, con matrices (A, B, C, D) “numéricas” en vez de matrices “rational-polynomial” $G(s)$.
- [-] La repr. interna normalizada también puede usarse en sistemas no lineales (el concepto de estado, ecuación de estado y ecuación de salida es el mismo):

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad y = h(x, u)$$

Por el contrario, los conceptos de función/matriz de transferencia aplican sólo a sistemas lineales.



Conclusiones

- La **Matriz de Transferencia** es una representación “intuitiva” para entender cómo las salidas responden a cada entrada en sistemas lineales, la identificación experimental (a veces, incluso “a mano”) es sencilla, y si hay muchos elementos cero, se representa como diagrama de bloques. Además, hay técnicas de diseño de controladores “*descentralizados*” (multilazo, cascada, desacoplamiento, ...) muy usuales en la práctica industrial. No es posible su uso para control no-lineal.
- La **Representación Interna** codifica directamente la “física” (incluso no lineal); usa un número menor de variables para describir/simular el sistema (realización mínima) y las técnicas de diseño multivariables (control “*centralizado*”) basadas en ella manejan matrices (A, B, C, D) numéricas (en vez de simbólicas $G(s)$) usualmente más fáciles de programar y más robustas numéricamente.