Introducción a la Reducción de Modelos Lineales

Antonio Sala
AI^2-DISA UPV

Notas de Control de Sistemas Complejos

Video-presentaciones disponibles, por secciones (ver transparencias).

Contenido

Sección 1

Introducción

Video-presentación disponible en `http://personales.upv.es/asala/YT/V/ro1.html`

Necesidad de reducir orden

- Modelos físicos pueden ser de orden elevado: elementos finitos, orden $= 2000$. • Difícil de "entender".
- Modelos "experimentales" pueden tener FdTs muy parecidas (p. ej., $[\,1/(s+1) \quad 1/(s+1{,}04)]$) en diferentes elementos de la MdT.

• Modelos con múltiples escalas de tiempo son lentos de simular

(paso de integración depende de la dinámica más rápida, "stiff" differential equations).

• Un modelo complejo resulta en controladores de orden elevado.

- El resultado puede ser "frágil": especializado en detalles del modelo difíciles de modelar con exactitud.
  - Ejemplo: control de robot cancelando las vibraciones (audibles) de 200 Hz de una articulación modelada como "instrumento musical de percusión". Funciona en simulación, pero el actuador "práctico" no tiene ese ancho de banda.

Enfoques

Modelo $G_{red}(s)$ para que el "error" $e(s) = G_{full}(s) - G_{red}(s)$ sea "pequeño" cuando:

- Entradas "baja frecuencia"
- Entradas ruido
- Entradas "worst-case"

Algunas variables son más importantes que otras:

- Necesario escalado previo: para ponderar adecuadamente las distintas amplitudes/varianzas de las entradas y los distintos requerimientos de precisión del modelo en diferentes salidas.

Reducción de repr. en vbles estado

- Los sensores observan la energía interna de los elementos capaces de almacenarla (vbles estado).
- Los actuadores modifican dicha energía interna.
- Se debe tener variables de estado que sean capaces simultaneamente de ser "cargadas" de energía ("controlabilidad") y que dicha energía "afecte" a las salidas que se miden o controlan ("observabilidad").
  - Generalizar el concepto de "realización mínima" (SI/NO controlable/observable) a algo "gradual"?
- Las variables de estado de un modelado experimental (identificación entrada-salida) *NO* tienen significado físico en general.

Sección 2

Técnicas de reducción de modelos

Marco general

Sea un sistema:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \tag{1}$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Du \tag{2}$$

donde se desea eliminar los estados del grupo "2" x_2.

Previamente: haber particionado x_1 y x_2 de acuerdo a algún criterio. [Luego se verá]

Paso 1: Suponer estacionario en x_2. *Nota: A_{22} debe ser estable

Paso 2: Despejar $x_2 = H(x_1, u)$ y sustituir en las ecuaciones del grupo 1.

Marco general

Sea un sistema:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \tag{1}$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Du \tag{2}$$

donde se desea eliminar los estados del grupo "2" x_2.

Previamente: haber particionado x_1 y x_2 de acuerdo a algún criterio. [Luego se verá]

Paso 1: Suponer estacionario en x_2. *Nota: A_{22} debe ser estable

Paso 2: Despejar $x_2 = H(x_1, u)$ y sustituir en las ecuaciones del grupo 1.

Detalle:

Estacionario para los estados en el grupo "2":

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \tag{3}$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Du \tag{4}$$

Se tiene:

$$-A_{22}x_2 = A_{21}x_1 + B_2 u \quad \Rightarrow \quad x_2 = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_1 + B_2 u)$$

con lo que el *modelo reducido* queda:

$$\frac{dx_1}{dt} = (A_1 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \tag{5}$$

$$y = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u \tag{6}$$

Matlab: En un sistema con orden total 5, y A_{22} de dimensión 3×3, eliminar esos tres estados se haría con:
`sysreducido=modred(sys,[3 4 5]);`.

Detalle:

Estacionario para los estados en el grupo "2":

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \tag{3}$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Du \tag{4}$$

Se tiene:

$$-A_{22}x_2 = A_{21}x_1 + B_2u \quad \Rightarrow \quad x_2 = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_1 + B_2u)$$

con lo que el *modelo reducido* queda:

$$\frac{dx_1}{dt} = (A_1 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \tag{5}$$

$$y = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u \tag{6}$$

Matlab: En un sistema con orden total 5, y A_{22} de dimensión 3×3, eliminar esos tres estados se haría con:
`sysreducido=modred(sys,[3 4 5]);`.

Subsección 1

Reducción Modal.

Video-presentación disponible en `http://personales.upv.es/asala/YT/V/romo.html`

Reducción modal: forma diagonal

Considérese un sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{7}$$

$$y = Cx + Du \tag{8}$$

y obténgase `[V,D]=eig(A)`, de modo que $A = VDV^{-1}$ y D sea una matriz [ver diagonalización de matrices], con los **polos** del sistema en la diagonal.

Ordenación de polos

Un sistema con un polo real en $-\sigma$ (izquierda) o con un par de polos complejos en $-\sigma \pm \omega_p j$ (dcha):

$$\frac{A}{s+\sigma} \qquad \frac{B}{(s+\sigma)^2+\omega_p^2} \tag{9}$$

tiene un tiempo de establecimiento $t_e = 4/\sigma$, y frecuencia de oscilaciones (frecuencia propia) de ω_p (en el caso derecho).

Propuesta: Eliminar polos rápidos (parte *real* σ grande) o/y de alta frecuencia (parte *imaginaria* ω_p grande).

- Si D está ordenada por módulo de los polos ($\omega_n = \sqrt{\sigma^2+\omega_p^2}$), eliminar los de ω_n alta.

* Error pequeño si las entradas varían lentamente (baja frecuencia).

Ordenación de polos

Un sistema con un polo real en $-\sigma$ (izquierda) o con un par de polos complejos en $-\sigma \pm \omega_p j$ (dcha):

$$\frac{A}{s+\sigma} \qquad \frac{B}{(s+\sigma)^2+\omega_p^2} \tag{9}$$

tiene un tiempo de establecimiento $t_e = 4/\sigma$, y frecuencia de oscilaciones (frecuencia propia) de ω_p (en el caso derecho).

Propuesta: Eliminar polos rápidos (parte *real* σ grande) o/y de alta frecuencia (parte *imaginaria* ω_p grande).

- Si D está ordenada por módulo de los polos ($\omega_n = \sqrt{\sigma^2+\omega_p^2}$), eliminar los de ω_n alta.

* Error pequeño si las entradas varían lentamente (baja frecuencia).

Reducción modal cálculo

- *Modelo en MdT:* Descomponer en fracciones simples, de tipo

$$\frac{M}{(s+\sigma)^p} \quad \text{(raices reales)} \qquad \frac{Ms+N}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)^q} \quad \text{(raíces complejas conjugadas)}$$

  - Eliminar fracciones con σ o con ω_n por encima de un umbral; para no cambiar ganancia, mantener constante M/σ^p o N/ω_n^2.

*El resultado es muy parecido a mantener la ganancia de los elementos a eliminar si está en forma zpk:

$$\frac{30}{(s+1)(s+100)} \approx \frac{30}{(s+1)100} = \frac{0{,}3}{s+1}$$

$$\frac{30}{(s+1)(s+100)} = \frac{0{,}303}{s+1} + \frac{-0{,}303}{s+100} \approx \frac{0{,}303}{s+1} + \frac{-0{,}303}{100}$$

Reducción modal cálculo

- A partir de la interna. Pasar a forma canónica diagonal con `[V,D]=eig(A)`, $x_{new} = V^{-1}x_{old}$. Luego, para evitar matrices A, B, C con complejos, los pares de polos complejos deben representarse como

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 s}{(s+\sigma^2) + \omega_p^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega_p \\ -\omega_p & -\sigma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \frac{\xi_1}{\omega_p+\sigma} & \xi_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u \end{cases} \tag{10}$$

- `[G1,G2] =` **freqsep**`(G,cut)` (Control System Tbx.).(modreal RCT)
  - El parámetro `cut` es la frecuencia de corte deseada de G_1 (modelo reducido). $G = G1 + G2$, de modo que $G2$ es el error.

Aplicaciones

- Típicamente, en ingeniería mecánica en sistemas a gran escala (modos de vibración "dominantes").
- En problemas de control asociados: **estructuras flexibles**.
- Pequeña escala: aproximación de modelos para control "sencillo" eliminando polos rápidos

$$\frac{s+2}{(s+10)(s^2+30*s+35^2)(s+0{,}6)^2} \approx \frac{s+2}{10 \cdot 35^2 \cdot (s+0{,}6)^2}$$

Subsección 2

Reducción equilibrada (balanced model reduction)

Video-presentación disponible en http://personales.upv.es/asala/YT/V/robal.html

Realización "equilibrada" **SISO**

Un sistema puede ser muy "controlable" (izquierda) o muy "observable" (dcha):

$$\begin{cases} \dot{x} = (-2)\, x + (\mathbf{1000})\, u \\ y = (0{,}004)\, x + (0)\, u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = (-2)\, x + (0{,}004)\, u \\ y = (\mathbf{1000})\, x + (0)\, u \end{cases}$$

y ambos tienen una representación entrada/salida FdT idéntica:

$$y(s) = \frac{4}{s+2} u(s)$$

- **Realización "equilibrada":**

$$\begin{cases} \dot{x} = (-2)\, x + (\mathbf{2})\, u \\ y = (\mathbf{2})\, x + (0)\, u \end{cases} \tag{11}$$

Realización "equilibrada" **SISO**

Un sistema puede ser muy "controlable" (izquierda) o muy "observable" (dcha):

$$\begin{cases} \dot{x} = (-2)\,x + (\mathbf{1000})\,u \\ y = (0{,}004)\,x + (0)\,u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = (-2)\,x + (0{,}004)\,u \\ y = (\mathbf{1000})\,x + (0)\,u \end{cases}$$

y ambos tienen una representación entrada/salida FdT idéntica:

$$y(s) = \frac{4}{s+2}u(s)$$

- **Realización "equilibrada":**

$$\begin{cases} \dot{x} = (-2)\,x + (\mathbf{2})\,u \\ y = (\mathbf{2})\,x + (0)\,u \end{cases} \tag{11}$$

Realización equilibrada, **caso general**

Gramianos de controlabilidad y observabilidad

(para más detalles, ver http:personales.upv.es/asala/YT/V/ctrb.html, obsv.html, obsm.html)

- **Controlabilidad:** `Gc = gram(sys,'c')`.
  - Una acción de control de norma unitaria $\int_{-\infty}^{0} u^T u = 1$ nunca podrá sacar al estado $x(0)$ del elipsoide $x(0)^T (G^c)^{-1} x(0) \leq 1$.
- **Observabilidad:** `Gob = gram(sys,'o')`.
  - Un estado inicial $x(0)$ tal que $x(0)^T x(0) \leq 1$ dará una salida que verificará $\int_{0}^{\infty} y^T y = x(0)^T G^{ob} x(0)$.

Factorización de Choleski: Toda matriz $W > 0$ se puede expresar como $W = Q^T Q$.

- En efecto, $W = VDV^T = \overbrace{V\sqrt{D}}^{Q^T} \cdot \overbrace{\sqrt{D}V^T}^{Q}$

Matlab: `Q=chol(W);`

Realización equilibrada

Sea

$$G^c = Q_c^T Q_c, \quad G^{ob} = Q_o^T Q_o$$

- Expresando con valores/vectores propios $\Xi = Q_c Q_o^T Q_o Q_c^T = V \Sigma^2 V^T$ se obtienen en la matriz diagonal Σ los **Hankel singular values** (ordenados).

  Ξ simétrica $\rightarrow$ V ortogonal, $V^T V = I$.

- Consideremos ahora el cambio de variable $x = Q_c^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}$. En esas nuevas coordenadas, el gramiano de controlabilidad queda igual a Σ:

$$x^T (G^c)^{-1} x = x^T (Q_c^T Q_c)^{-1} x = x^T Q_c^{-1} Q_c^{-T} x = (\hat{x}^T \Sigma^{-1/2} V^T Q_c) Q_c^{-1} Q_c^{-T} (Q_c^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}) = \hat{x} (\Sigma)^{-1} \hat{x}$$

y el de observabilidad también es igual a Σ:

$$x^T G^{ob} x = x^T Q_o^T Q_o x = (\hat{x}^T \Sigma^{-1/2} V^T Q_c) Q_o^T Q_o (Q_c^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}) = (\hat{x}^T \Sigma^{-1/2} V^T V \Sigma^2 V^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}) = \hat{x} \Sigma \hat{x}$$

Realización equilibrada

Sea

$$G^c = Q_c^T Q_c, \quad G^{ob} = Q_o^T Q_o$$

- Expresando con valores/vectores propios $\Xi = Q_c Q_o^T Q_o Q_c^T = V\Sigma^2 V^T$ se obtienen en la matriz diagonal Σ los **Hankel singular values** (ordenados).

  Ξ simétrica $\to$ V ortogonal, $V^T V = I$.

- Consideremos ahora el cambio de variable $x = Q_c^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}$. En esas nuevas coordenadas, el gramiano de controlabilidad queda igual a Σ:

$$x^T (G^c)^{-1} x = x^T (Q_c^T Q_c)^{-1} x = x^T Q_c^{-1} Q_c^{-T} x =$$
$$(\hat{x}^T \Sigma^{-1/2} V^T Q_c) Q_c^{-1} Q_c^{-T} (Q_c^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}) = \hat{x}(\Sigma)^{-1} \hat{x}$$

  y el de observabilidad también es igual a Σ:

$$x^T G^{ob} x = x^T Q_o^T Q_o x = (\hat{x}^T \Sigma^{-1/2} V^T Q_c) Q_o^T Q_o (Q_c^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}) =$$
$$(\hat{x}^T \Sigma^{-1/2} V^T V \Sigma^2 V^T V \Sigma^{-1/2} \hat{x}) = \hat{x} \Sigma \hat{x}$$

Realización equilibrada en MATLAB

- `hsv = hsvd(sys)`. Calcula los Hankel singular values (diagonal de Σ).
  - Valores bajos indican estados que las entradas pueden mover "poco" y, de todas formas, las salidas son también "poco afectadas" por esos movimientos, de haberlos.
- `[sysb, g]= balreal(sys)` . Devuelve la realización equilibrada `sysb` junto con los valores singulares (en g).

El control system toolbox tiene una '*model reducer* app' , con interfaz interactiva.

Modelos reducidos

- `rsys = balred(sys,R)` devuelve en rsys sólo los primeros "R" estados de la realización equilibrada, eliminando el resto.

*Definamos $\|e\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty e(t)^T e(t) dt}$, y análogamente con $\|u\|_2$.

Teorema (Cota de error –peor caso–)

Si el error $e(t)$ es la salida de $(sys - rsys)$ ante la entrada $u(t)$ y $x(0) = 0$, puede probarse que* $\|e\|_2 \leq 2\|u\|_2 \sum_{i=R+1}^{n} \sigma_i$.

Con la definición de norma infinito de un sistema $y = Gu$ como $\|G\|_\infty := \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$, podemos equivalentemente decir que

$$\|sys - rsys\|_\infty \leq 2 \sum_{i=R+1}^{n} \sigma_i$$

Otras opciones

Un ejemplo en Matlab de aplicación de reducciones modal y equilibrada puede visionarse en `http://personales.upv.es/asala/YT/V/roml.html`

Robust control toolbox:

- Para sistemas inestables `GRED = `**ncfmr**`(G,order)`.
- Para minimizar error "relativo" $\|e\|/\|y\|$, en vez de "absoluto" $\|e\|$, `GRED = `**bstmr**`(G,order)`.
- Reducción de modelos ponderando un rango de frecuencias. `[GRED,redinfo] =` **reduce**`(G,order,'Weights',{Woutoput Winput})`

Aparte, más técnicas para sistemas no lineales, técnicas computacionalmente rápidas para sistemas a "gran escala" (decenas de miles de estados), reducción para acelerar simulación, ...