Modelado LFT incierto de Sistemas No Lineales

Control de Sistemas Complejos

Vídeo presentación en:
http://personales.upv.es/asala/YT/V/OAlftnolin.html

Introducción: Objetivos y planteamiento del problema

Motivación:

- Todos los procesos en la práctica son no-lineales.
- Una teoría "buena" de control robusto debería incluir la no-linealidad.

Objetivo:

- Ser capaz de incorporar una no-linealidad de un modelo de primeros principios conocido a un esquema de incertidumbre LFT para control robusto.

Contenido:

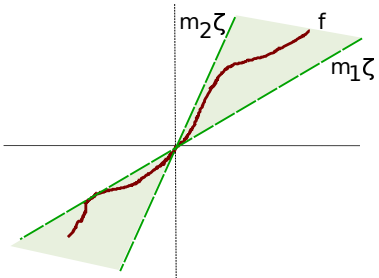
- No-linealidad de sector: definición
- Concepto de embebido LPV (LPV embedding)
- Ejemplo + Ejercicio propuesto

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Incorporación de no-linealidad

Consideremos una nolinealidad $\alpha = f(\zeta)$, diferenciable, con $f(0) = 0$, que verifica la condición de **sector**, esto es, que existen dos números reales m_1, m_2, con $m_1 < m_2$ tales que:

- $m_1 \cdot \zeta \leq f(\zeta) \leq m_2 \cdot \zeta$, para $\zeta \geq 0$, y
- $m_2 \cdot \zeta \leq f(\zeta) \leq m_1 \cdot \zeta$, para $\zeta \leq 0$.



♦Equivalentemente, $m_1\zeta^2 \leq f(\zeta)\zeta \leq m_2\zeta^2$, para todo ζ.

*Sin pérdida de generalidad, consideremos $m_1 = -1$, $m_2 = 1$.

En efecto, el cambio lineal $\alpha = 0.5(m_2 - m_1)\bar{\alpha} + 0.5(m_2 + m_1)\zeta$, esto es,

$$\bar{\alpha} = \bar{f}(\zeta) := \frac{2}{m_2 - m_1} f(\zeta) - \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\zeta$$

verifica $-\zeta^2 \leq \hat{\alpha}\zeta \leq \zeta^2$.

En modelado LFT, el cambio lineal entre f y $\bar{f}$ se integraría en la parte lineal determinista del resto de ecuaciones del sistema a controlar (ver ejemplo posterior).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Incorporación de no-linealidad (2)

Consideremos el conjunto de entradas-salidas compatibles con el modelo, esto es, el **grafo**

$$\mathcal{P} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \alpha(t) = \bar{f}(\zeta(t))\}$$

y el conjunto (zona sombreada de la gráfica transp. anterior, en todo t)

$$\mathcal{R} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \exists \delta(t) \; s.t. \; \alpha(t) = \delta(t)\zeta(t), |\delta(t)| \leq 1 \; \forall t\}$$

Evidentemente $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$, dado que escogiendo $\delta(t) = \bar{f}(\zeta(t))/\zeta(t)$ verifica lo que se pide en la definición de $\mathcal{R}$.

LPV embedding: Si diseñamos un controlador robusto para el (sub)sistema **lineal de parámetro variante en el tiempo (LPV)** $\alpha = \delta(t)\zeta$, lo será para el sistema no-lineal original.

Incorporación de no-linealidad (2)

Consideremos el conjunto de entradas-salidas compatibles con el modelo, esto es, el **grafo**

$$\mathcal{P} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \alpha(t) = \bar{f}(\zeta(t))\}$$

y el conjunto (zona sombreada de la gráfica transp. anterior, en todo t)

$$\mathcal{R} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \exists \delta(t) \; s.t. \; \alpha(t) = \delta(t)\zeta(t), |\delta(t)| \leq 1 \; \forall t\}$$

Evidentemente $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$, dado que escogiendo $\delta(t) = \bar{f}(\zeta(t))/\zeta(t)$ verifica lo que se pide en la definición de $\mathcal{R}$.

LPV embedding: Si diseñamos un controlador robusto para el (sub)sistema **lineal de parámetro variante en el tiempo (LPV)** $\alpha = \delta(t)\zeta$, lo será para el sistema no-lineal original.

*Técnicamente, el cambio a LPV no es necesario para el teorema de pequeña ganancia clásico, dado que el operador $\bar{f}$ tiene norma menor que 1, pero sí para pequeña ganancia escalado (un multiplicador S escalar verifica $S\delta(t) = \delta(t)S$, pero no verifica $S\bar{f}(\zeta) = \bar{f}(S\zeta)$ si $\bar{f}$ es no-lineal).
- Obviamente, es conservativo comparado con el control no-lineal "puro y duro".

Incorporación de no-linealidad (2)

Consideremos el conjunto de entradas-salidas compatibles con el modelo, esto es, el **grafo**

$$\mathcal{P} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \alpha(t) = \bar{f}(\zeta(t))\}$$

y el conjunto (zona sombreada de la gráfica transp. anterior, en todo t)

$$\mathcal{R} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \exists \delta(t) \; s.t. \; \alpha(t) = \delta(t)\zeta(t), |\delta(t)| \leq 1 \; \forall t\}$$

Evidentemente $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$, dado que escogiendo $\delta(t) = \bar{f}(\zeta(t))/\zeta(t)$ verifica lo que se pide en la definición de $\mathcal{R}$.

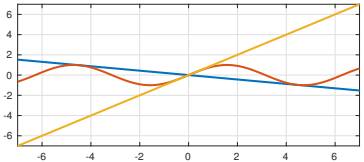
LPV embedding: Si diseñamos un controlador robusto para el (sub)sistema **lineal de parámetro variante en el tiempo (LPV)** $\alpha = \delta(t)\zeta$, lo será para el sistema no-lineal original.

*Técnicamente, el cambio a LPV no es necesario para el **teorema de pequeña ganancia** clásico, dado que el operador $\bar{f}$ tiene norma menor que 1, pero sí para pequeña ganancia **escalado** (un multiplicador S escalar verifica $S\delta(t) = \delta(t)S$, pero **no** verifica $S\bar{f}(\zeta) = \bar{f}(S\zeta)$ si $\bar{f}$ es no-lineal).
– Obviamente, es conservativo comparado con el control no-lineal "puro y duro".

Ejemplo

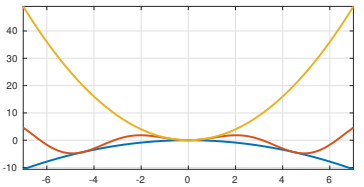
Consideremos un sistema dinámico con las ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2) - 2x_2$$



La función $\sin\zeta$ está en el sector delimitado por -0.218ζ y ζ:

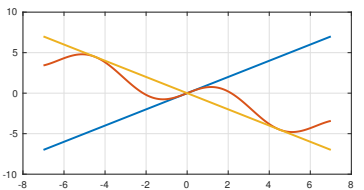
```
x=-7:.1:7; f=sin(x);
m1=-.218; m2=1; fx0=f; f20=m2*x; f10=m1*x;
figure(1), plot(x,[f10; fx0; f20],'Linewidth',2);
fx=f.*x; f2=1*x.^2; f1=-.218*x.^2;
figure(2), plot(x,[f1; fx; f2],'Linewidth',2)
```



*Hagamos el cambio de vble. $\zeta = x_1 + x_2$, $\sin\zeta = 0.609\bar{f}(\zeta) + 0.391\zeta$, con lo que

$$\bar{f}(\zeta) = -0.6427\zeta + 1.6427\sin\zeta$$

está en el sector entre dos rectas de pendiente ± 1, $\Rightarrow \|\bar{f}\|_\infty = 1$.



Ejemplo (2)

Embebiendo la nolinealidad en el modelo LTV $\bar{f}(x_1(t)) = \delta(t)x_1(t)$, con $|\delta| \leq 1$, las trayectorias del sistema original son un subconjunto de las de la "familia de sistemas" dados por la interconexión (LFT) de un sistema LTI:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0.391(x_1 + x_2) - 2x_2 + 0.609y_\delta$$
$$u_\delta = x_1 + x_2 \qquad \text{(Ecuación de salida)}$$

y el sistema incierto $y_\delta = \delta u_\delta$, siendo δ un sistema lineal variante en el tiempo "desconocido" del que sólo se sabe $\|\delta\|_\infty \leq 1$.

*Por Teorema de Pequeña Ganancia, como la norma del sistema LTI es: A=[-2 1; .391 -2+.391]; B=[0; 0.609]; C=[1 1]; norm(ss(A,B,C,0),'inf') 0.643, toda la familia de sistemas es estable, y por tanto el sistema no-lineal también.

Ejemplo (2)

Embebiendo la nolinealidad en el modelo LTV $\bar{f}(x_1(t)) = \delta(t)x_1(t)$, con $|\delta| \leq 1$, las trayectorias del sistema original son un subconjunto de las de la "familia de sistemas" dados por la interconexión (LFT) de un sistema LTI:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0.391(x_1 + x_2) - 2x_2 + 0.609y_\delta$$
$$u_\delta = x_1 + x_2 \qquad \text{(Ecuación de salida)}$$

y el sistema incierto $y_\delta = \delta u_\delta$, siendo δ un sistema lineal variante en el tiempo "desconocido" del que sólo se sabe $\|\delta\|_\infty \leq 1$.

*Por Teorema de Pequeña Ganancia, como la norma del sistema LTI es: A=[-2 1; .391 -2+.391]; B=[0; 0.609]; C=[1 1]; norm(ss(A,B,C,0),'inf') 0.643, toda la familia de sistemas es estable, y por tanto el sistema no-lineal también.

*En el control por **planificación de ganancia** se hace uso explícito de que sabemos que $\delta = -0.6427 + 1.6427\frac{\sin(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$ podría ser "medible" a la hora de diseñar un control $u(x, \delta(t))$. No así en control "robusto" clásico.

Ejemplo (2)

Embebiendo la nolinealidad en el modelo LTV $\bar{f}(x_1(t)) = \delta(t)x_1(t)$, con $|\delta| \leq 1$, las trayectorias del sistema original son un subconjunto de las de la "familia de sistemas" dados por la interconexión (LFT) de un sistema LTI:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0.391(x_1 + x_2) - 2x_2 + 0.609y_\delta$$
$$u_\delta = x_1 + x_2 \qquad \text{(Ecuación de salida)}$$

y el sistema incierto $y_\delta = \delta u_\delta$, siendo δ un sistema lineal variante en el tiempo "desconocido" del que sólo se sabe $\|\delta\|_\infty \leq 1$.

*Por Teorema de Pequeña Ganancia, como la norma del sistema LTI es: A=[-2 1; .391 -2+.391]; B=[0; 0.609]; C=[1 1]; norm(ss(A,B,C,0),'inf') 0.643, toda la familia de sistemas es estable, y por tanto el sistema no-lineal también.

*En el control por **planificación de ganancia** se hace uso explícito de que sabemos que $\delta = -0.6427 + 1.6427\frac{\sin(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$ podría ser "medible" a la hora de diseñar un control $u(x, \delta(t))$. No así en control "robusto" clásico.

Ejercicio (caso de estudio) propuesto

- Modela un sistema masa-muelle-amortiguador de segundo orden, en vertical (efecto gravedad).

- Considera un muelle no-lineal cuya fuerza en función del incremento de longitud respecto a la longitud natural sea:

$$F_{muelle} = k_1 \cdot (l - l_{nat}) + k_3 \cdot (l - l_{nat})^3$$

- Linealiza alrededor de un punto de funcionamiento ($M = 1$, $c = 0.1$, $k_1 = 3$, $k_3 = 0.1$, $l_{nat} = 0.5$).
- Obtén un modelo de sector de la no-linealidad y expresa el modelo resultante en formato LFT.
  - El modelo deberá ser, obligatoriamente, local en una zona alrededor del p.f. elegido: un polinomio cúbico no puede embeberse en un sector lineal en todo $\mathbb{R}$.