

# Modelado de sistemas inciertos/no lineales/variantes en el tiempo (Linear Fractional Transformation, LFT)

Antonio Sala

Universitat Politècnica de València

## Notas sobre Control de Sistemas Complejos

Video-presentación disponible, por fragmentos (ver diapositivas), así como todos los videos concatenados ([personales.upv.es/asala/videos/lftrtodo.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lftrtodo.html))



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Estructura de la presentación

- 1 Introducción y Revisión de conceptos
- 2 Modelado LFT
  - Otros tipos de incertidumbre racional en 1 parámetro
- 3 Modelado LFT incierto de Sistemas No Lineales
- 4 Modelado LFT con varios parámetros
- 5 Conclusiones



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Sección 1

## Introducción y Revisión de conceptos

Video-presentación disponible en:

[personales.upv.es/asala/videos/lftr1.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lftr1.html)



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Objetivos

- Interconexión LFT como generalización de diagramas de bloques.
- Extracción de elementos inciertos en leyes físicas como elemento independiente:
  - Expresión de modelos como interconexión de dos sistemas:
    - 1 sistema sin incertidumbre (lineal)
    - 2 Sistema que agrupa toda la incertidumbre.
- Manipulación de dichos modelos
- Análisis de estabilidad y diseño de controladores (en otras presentaciones).



# Interconexión LFT (linear fractional transformation)

Dados dos operadores  $M$ ,  $H$ , siendo  $M$  lineal,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

la interconexión LFT inferior (lower) se define (con dimensiones e invertibilidad adecuadas de matrices) como:

$$F_l(M, H) = M_{11} + M_{12}H(I - M_{22}H)^{-1}M_{21}$$

$$*\text{equiv. } F_l(M, H) = M_{11} + M_{12}(I - HM_{22})^{-1}HM_{21}$$

y la LFT superior (upper) como:

$$F_u(M, H) = M_{22} + M_{21}H(I - M_{11}H)^{-1}M_{12}$$

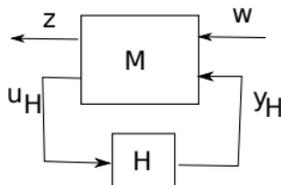


# Diagrama de bloques LFT inferior

La LFT inferior  $F_l$  elimina  $u_H$ ,  $y_H$  de las ecuaciones de un sistema dado por:

$$\begin{pmatrix} z \\ u_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y_H \end{pmatrix}, \quad y_H = H u_H$$

esto es, el diagrama:



se transforma en:  $z = M_{11}w + M_{12}Hu_H$ ,  $u_H = M_{21}w + M_{22}Hu_H \Rightarrow u_H = (I - M_{22}H)^{-1}M_{21}w$

$$z = F_l(M, H)w = (M_{11} + M_{12}H(I - M_{22}H)^{-1}M_{21}) w$$

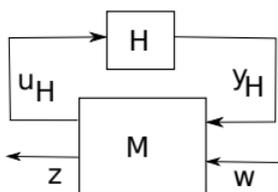


# Diagrama de bloques LFT superior

La LFT superior  $F_u$  elimina  $u_H$ ,  $y_H$  de las ecuaciones de un sistema dado por:

$$\begin{pmatrix} u_H \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_H \\ w \end{pmatrix}, \quad y_H = H u_H$$

esto es, el diagrama:



se transforma en:

$$z = F_u(M, H)w = (M_{22} + M_{21}H(I - M_{11}H)^{-1}M_{12}) w$$

\*  $LFT_u$  y  $LFT_l$  son lo mismo, cambiando variables de orden:

$$LFT_u\left(\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, H\right) = LFT_l\left(\begin{pmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}, H\right)$$



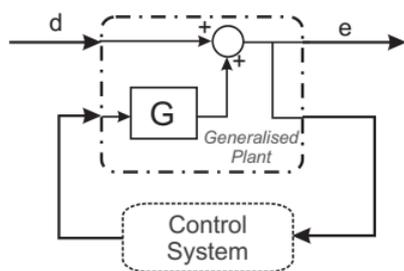
# Los bucles de control como LFT

La mayoría de interconexiones relevantes en control se pueden expresar como LFT. **Ejemplo:** el bucle de control standard para rechazo de perturbaciones  $u = Ke$ ,  $y = Gu + d$ , al cerrar el bucle queda como

$$e = LFT_I(\bar{P}, K)d = \left( \underbrace{I}_{11} + \underbrace{G}_{12} K (I - \underbrace{G}_{22} K)^{-1} \underbrace{I}_{21} \right) d$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} I & G \\ I & G \end{pmatrix}$$

$$e = (I - GK)^{-1}d$$



A  $\bar{P}$  se le llama **planta generalizada**, porque incluye a la planta "real" a controlar  $G$  junto con información sobre el problema de control a resolver (**flujo de información**).

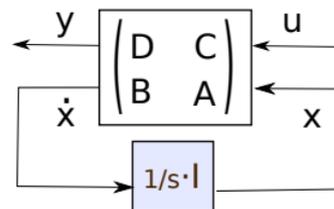
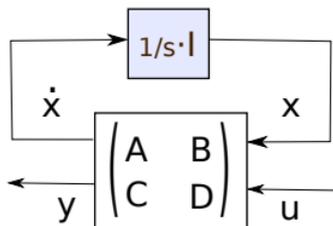


# Representación interna como LFT

De la fórmula de representación interna

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



$$\begin{aligned} y(s) = G(s)u(s) &= LFT_u \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s}I \right) = LFT_l \left( \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}, \frac{1}{s}I \right) \\ &= (D + Cs^{-1}(I - As^{-1})^{-1}B) u(s) = (D + C(sl - A)^{-1}B) u(s) \end{aligned}$$



# Realización: de Fracción/FdT a LFT/rep. interna

Dada cualquier función de transferencia estrictamente propia

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

puede ser expresada como  $s \cdot x = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  con:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1})$$

\* Resultados similares con matrices de transferencia. Matlab: `minreal(ss(sys_tf))`



## Sección 2

# Modelado LFT

Video-presentación disponible en:

[personales.upv.es/asala/videos/lfr1.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lfr1.html)



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Modelos inciertos LPV

Consideremos un modelo índice 1 (se puede despejar  $y(x, u)$ ):

$$\dot{x} = f(x, y, u), 0 = g(x, y, u)$$

Sin pérdida de generalidad, sigue siendo índice 1:  $\dot{x} = \xi$ ,  $0 = \xi - f(x, y, u)$ ,  
 $0 = g(x, y, u)$ .

Vamos a considerar, pues, incluyendo  $\xi$  en el grupo  $y$ , el problema de modelado de

$$0 = g(x, y, u)$$

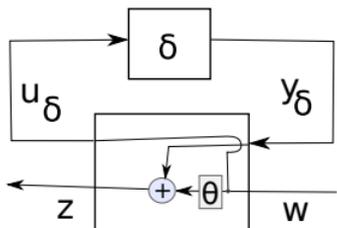
donde se desea despejar  $y$  en función de  $(x, u)$ .

**Caso cuasi-lineal:** Modelo  $y = G_x(\delta(x, t))x + G_u(\delta(x, t))u$  donde  $G_x$ ,  $G_y$  son matrices racionales-polinomiales y  $\delta(x, t)$  modela la *incertidumbre, no-linealidad o variación temporal de parámetros*.



# Representación LFT de UNA ecuación lineal incierta

Sea  $z = \theta w$  (nominal) + Incertidumbre aditiva:  $z = (\theta + \delta)w$



$$z = \theta w + y_\delta, \quad y_\delta = \delta w$$

$$z = LFT_u \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix}}_{\text{Mod. Nominal}}, \underbrace{\delta}_{\text{incertidumbre}} \right) w$$

Mod. generalizado LINEAL

Modelo nominal:

$$z = LFT_u \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix}, 0 \right) w = \theta w$$

Ejemplo:  $z = (2 + \sin(w))w$ ,  $\theta = 2$ ,  $\delta = \sin(w)$ .

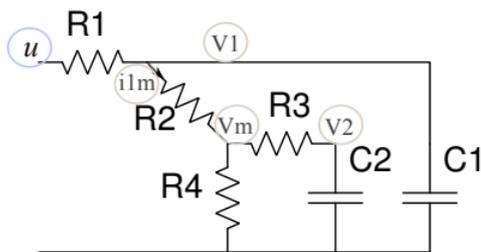


UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Integración en un modelo completo

- Escribir la ecuación incierta en un sistema de ecuaciones.
- Manipular para eliminar/simplificar/representación interna el resto de ecuaciones.
- El modelo queda con el resto de ecuaciones en LFT con la no integrada.

Ejemplo: circuito eléctrico con elemento R2 incierto/no lineal



Entrada:  $u(t)$ ; Salidas  $V_1(t)$ ,  $V_m(t)$ ... en planta generalizada, añadir  $u_\delta$ ,  $y_\delta$ ...

**MATLAB** en [personales.upv.es/asala/videos/lftr1ml.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lftr1ml.html)]

[Ejemplo



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

## Subsección 1

# Otros tipos de incertidumbre racional en 1 parámetro

Video-presentación disponible en:

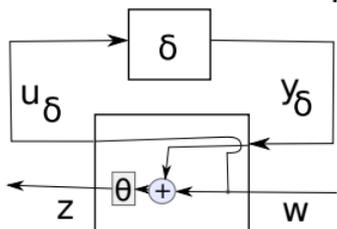
[personales.upv.es/asala/videos/lftr1rac.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lftr1rac.html)



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

# Representación LFT de UNA ecuación lineal incierta (II)

Incetidumbre multiplicativa  $z = \theta(1 + \delta)w$ :



$$z = \theta(w + y_\delta), \quad y_\delta = \delta w$$

$$z = LFT_u \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \theta & \theta \end{pmatrix}}_{\text{Mod. generalizado LINEAL}}, \underbrace{\delta}_{\text{incertidumbre}} \right) w$$

Modelo nominal:

$$z = LFT_u \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \theta & \theta \end{pmatrix}, 0 \right) w = \theta w$$



# Varias ecuaciones lineales con mismo parámetro

Modelo  $a_{p \times 1} = \delta M_{p \times q} b_{q \times 1}$ , con  $M$  de rango ' $r$ '.

- Hacemos SVD (económico) de  $M = U_{p \times r} S_{r \times r} V_{q \times r}^T$
- Tenemos  $a = (\delta M)b = (US^{1/2} \delta I_{r \times r} S^{1/2} V^T)b$
- Cambiamos la ecuación del modelo por tres ecuaciones:

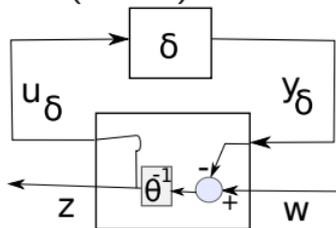
$$\underbrace{a = US^{1/2}\xi, \quad \beta = S^{1/2}V^T b,}_{\text{Se incorporan a modelo generalizado sin incert.}} \quad \underbrace{\xi = \delta I_{r \times r} \cdot \beta}_{\text{ec. incertidumbre}}$$



# Incertidumbre sobre la inversa

Consideremos  $z = \theta^{-1}w$ , con incertidumbre aditiva:

$$z = (\theta + \delta)^{-1}w$$



$$z = \theta^{-1}(w - y_\delta), \quad y_\delta = \delta z$$

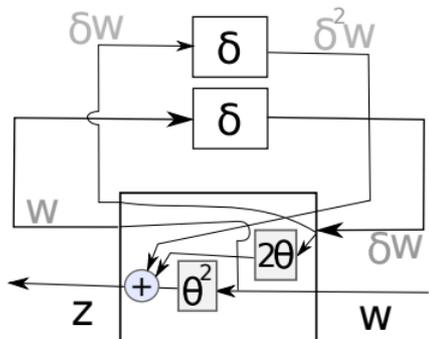
$$z = LFT_u \left( \begin{pmatrix} -\theta^{-1} & \theta^{-1} \\ -\theta^{-1} & \theta^{-1} \end{pmatrix}, \delta \right) w$$

$$\begin{aligned} LFT_u(\cdot, \delta) &= \theta^{-1} - \theta^{-1}\delta(1 + \theta^{-1}\delta)^{-1}\theta^{-1} = \theta^{-1}(1 - \delta(\theta + \delta)^{-1}) \\ &= \theta^{-1} \frac{\theta}{\theta + \delta} = \frac{1}{\theta + \delta} \end{aligned}$$



# Expresiones polinomiales de variables inciertas

Consideremos  $z = (\theta + \delta)^2 w = (\theta^2 + 2\theta\delta + \delta^2)w$ .



$$z = LFT_u \left( \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2\theta & \theta^2 \end{array} \right), \delta I_{2 \times 2} \right) w$$

Cf. Transp. [10]



# Caso general racional-polinomial (1 param)

Cualquier función racional estrictamente propia de  $s$ ,  $G(s)$ , se puede expresar con una LFT de  $1/s$ , ver Transp. [10]...

Si consideramos una función racional+polinomial  $G(\delta)$ , donde exista  $G(0)$

- ① cambio  $\delta = \xi^{-1}$ , y se convierte a  $G(\xi)$ .
- ② Se expresa como LFT con  $\xi^{-1}$  aplicando técnicas de MdT a estado...
- ③ Se deshace el cambio de variable, LFT con  $\delta$ .



# Ejemplo caso general (1 param)

Sea el modelo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{1+\delta^2} & -2 + \delta \\ -4 + \delta^2 & \frac{\delta}{1+\delta+\delta^2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 + \delta \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad -\delta) x$$

MATLAB representación LFT orden 7 en  $\delta$ ; orden 2 en  $\frac{d}{dt}$ .

Representación válida sea  $\delta$  un parámetro incierto pero constante, una no-linealidad  $\delta \equiv \sin(x_1^2)$  o un parám. variante en el tiempo  $\delta(t) \equiv e^{-4t}$ .

Los detalles de este ejemplo pueden consultarse en la presentación:

[personales.upv.es/asala/videos/lft1racml.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lft1racml.html).



## Sección 3

# Modelado LFT incierto de Sistemas No Lineales

Video-presentación disponible en:

[personales.upv.es/asala/videos/lftnolin.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lftnolin.html)



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

# Introducción: Objetivos y planteamiento del problema

\*Además del video [lftnolin.html](#), un "vistazo rápido" algo más breve puede visionarse en [OAlftnolin.html](#).

## Motivación:

- Todos los procesos en la práctica son no-lineales.
- Una teoría "buena" de control robusto debería incluir la no-linealidad.

## Objetivo:

- Ser capaz de incorporar una no-linealidad de un modelo de primeros principios conocido a un esquema de incertidumbre LFT para control robusto.

## Contenido:

- No-linealidad de sector: definición
- Concepto de embebido LPV (LPV embedding)
- Ejemplo + Ejercicio propuesto

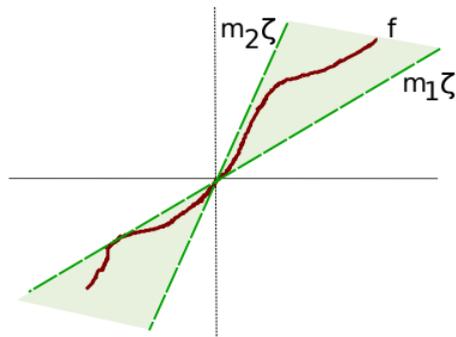


# Incorporación de no-linealidad

Consideremos una no-linealidad  $\alpha = f(\zeta)$ , diferenciable, con  $f(0) = 0$ , que verifica la condición de **sector**, esto es, que existen dos números reales  $m_1$ ,  $m_2$ , con  $m_1 < m_2$  tales que:

- $m_1 \cdot \zeta \leq f(\zeta) \leq m_2 \cdot \zeta$ , para  $\zeta \geq 0$ , y
- $m_2 \cdot \zeta \leq f(\zeta) \leq m_1 \cdot \zeta$ , para  $\zeta \leq 0$ .

♦ Equivalentemente,  $m_1 \zeta^2 \leq f(\zeta)\zeta \leq m_2 \zeta^2$ , para todo  $\zeta$ .



\*Sin pérdida de generalidad, consideremos  $m_1 = -1$ ,  $m_2 = 1$ .

En efecto, el cambio lineal  $\alpha = 0.5(m_2 - m_1)\bar{\alpha} + 0.5(m_2 + m_1)\zeta$ , esto es,

$$\bar{\alpha} = \bar{f}(\zeta) := \frac{2}{m_2 - m_1} f(\zeta) - \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} \zeta$$

verifica  $-\zeta^2 \leq \hat{\alpha}\zeta \leq \zeta^2$ .

En modelado LFT, el cambio lineal entre  $f$  y  $\bar{f}$  se integraría en la parte lineal determinista del resto de ecuaciones del sistema a controlar (ver ejemplo posterior).



## Incorporación de no-linealidad (2)

Consideremos el conjunto de entradas-salidas compatibles con el modelo, esto es, el **grafo**

$$\mathcal{P} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \alpha(t) = \bar{f}(\zeta(t))\}$$

y el conjunto (zona sombreada de la gráfica transp. anterior, en todo  $t$ )

$$\mathcal{R} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \exists \delta(t) \text{ s.t. } \alpha(t) = \delta(t)\zeta(t), |\delta(t)| \leq 1 \forall t\}$$

Evidentemente  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ , dado que escogiendo  $\delta(t) = \bar{f}(\zeta(t))/\zeta(t)$  verifica lo que se pide en la definición de  $\mathcal{R}$ .

**LPV embedding:** Si diseñamos un controlador robusto para el (sub)sistema **lineal de parámetro variante en el tiempo (LPV)**  $\alpha = \delta(t)\zeta$ , lo será para el sistema no-lineal original.



## Incorporación de no-linealidad (2)

Consideremos el conjunto de entradas-salidas compatibles con el modelo, esto es, el **grafo**

$$\mathcal{P} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \alpha(t) = \bar{f}(\zeta(t))\}$$

y el conjunto (zona sombreada de la gráfica transp. anterior, en todo  $t$ )

$$\mathcal{R} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \exists \delta(t) \text{ s.t. } \alpha(t) = \delta(t)\zeta(t), |\delta(t)| \leq 1 \forall t\}$$

Evidentemente  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ , dado que escogiendo  $\delta(t) = \bar{f}(\zeta(t))/\zeta(t)$  verifica lo que se pide en la definición de  $\mathcal{R}$ .

**LPV embedding:** Si diseñamos un controlador robusto para el (sub)sistema **lineal de parámetro variante en el tiempo (LPV)**  $\alpha = \delta(t)\zeta$ , lo será para el sistema no-lineal original.

\*Técnicamente, el cambio a LPV no es necesario para el teorema de pequeña ganancia clásico, dado que el operador  $\bar{f}$  tiene norma menor que 1, pero sí para pequeña ganancia escalado (un multiplicador  $S$  escalar verifica  $S\delta(t) = \delta(t)S$ , pero no verifica  $S\bar{f}(\zeta) = \bar{f}(S\zeta)$  si  $\bar{f}$  es no-lineal).

– Obviamente, es conservativo comparado con el control no-lineal "puro y duro".



## Incorporación de no-linealidad (2)

Consideremos el conjunto de entradas-salidas compatibles con el modelo, esto es, el **grafo**

$$\mathcal{P} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \alpha(t) = \bar{f}(\zeta(t))\}$$

y el conjunto (zona sombreada de la gráfica transp. anterior, en todo  $t$ )

$$\mathcal{R} := \{(\alpha(\cdot), \zeta(\cdot)) : \exists \delta(t) \text{ s.t. } \alpha(t) = \delta(t)\zeta(t), |\delta(t)| \leq 1 \forall t\}$$

Evidentemente  $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ , dado que escogiendo  $\delta(t) = \bar{f}(\zeta(t))/\zeta(t)$  verifica lo que se pide en la definición de  $\mathcal{R}$ .

**LPV embedding:** Si diseñamos un controlador robusto para el (sub)sistema **lineal de parámetro variante en el tiempo (LPV)**  $\alpha = \delta(t)\zeta$ , lo será para el sistema no-lineal original.

\*Técnicamente, el cambio a **LPV** no es necesario para el **teorema de pequeña ganancia** clásico, dado que el operador  $\bar{f}$  tiene norma menor que 1, pero sí para pequeña ganancia **escalado** (un multiplicador  $S$  escalar verifica  $S\delta(t) = \delta(t)S$ , pero no verifica  $S\bar{f}(\zeta) = \bar{f}(S\zeta)$  si  $\bar{f}$  es no-lineal).

– Obviamente, es conservativo comparado con el control no-lineal “puro y duro”.



# Ejemplo

Consideremos un sistema dinámico con las ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = \sin(x_1 + x_2) - 2x_2$$

La función  $\sin \zeta$  está en el sector delimitado por  $-0.218\zeta$  y  $\zeta$ :

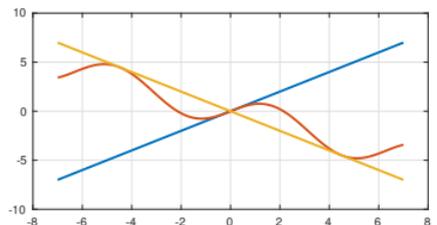
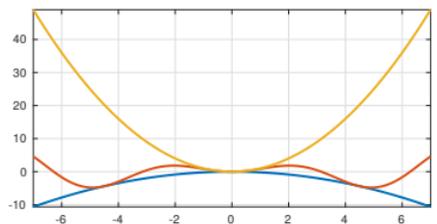
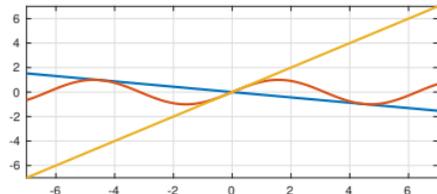
```
x=-7:.1:7; f=sin(x);
m1=-.218; m2=1; fx0=f; f20=m2*x; f10=m1*x;
figure(1), plot(x,[f10; fx0; f20], 'Linewidth', 2);
fx=f.*x; f2=1*x.^2; f1=-.218*x.^2;
figure(2), plot(x,[f1; fx; f2], 'Linewidth', 2)
```

\*Hagamos el cambio de vble.  $\zeta = x_1 + x_2$ ,

$\sin \zeta = 0.609\bar{f}(\zeta) + 0.391\zeta$ , con lo que

$$\bar{f}(\zeta) = -0.6427\zeta + 1.6427 \sin \zeta$$

está en el sector entre dos rectas de pendiente  $\pm 1$ ,  $\Rightarrow \|\bar{f}\|_{\infty} = 1$ .



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

## Ejemplo (2)

*Embebiendo* la no linealidad en el modelo LTV

$\bar{f}(x_1(t)) = \delta(t)x_1(t)$ , con  $|\delta| \leq 1$ , las trayectorias del sistema original son un subconjunto de las de la “familia de sistemas” dados por la interconexión (LFT) de un sistema LTI:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0.391(x_1 + x_2) - 2x_2 + 0.609y_\delta$$

$$u_\delta = x_1 + x_2 \quad (\text{Ecuación de salida})$$

y el sistema incierto  $y_\delta = \delta u_\delta$ , siendo  $\delta$  un sistema lineal variante en el tiempo “desconocido” del que sólo se sabe  $\|\delta\|_\infty \leq 1$ .

\*Por Teorema de Pequeña Ganancia, como la norma del sistema LTI es:  $A=[-2 \ 1; \ 391 \ -2+391]$ ;  $B=[0; \ 0.609]$ ;  $C=[1 \ 1]$ ;  $\text{norm}(ss(A,B,C,0), 'inf') = 0.643$ , toda la familia de sistemas es estable, y por tanto el sistema no-lineal también.



## Ejemplo (2)

*Embebiendo* la no linealidad en el modelo LTV

$\bar{f}(x_1(t)) = \delta(t)x_1(t)$ , con  $|\delta| \leq 1$ , las trayectorias del sistema original son un subconjunto de las de la “familia de sistemas” dados por la interconexión (LFT) de un sistema LTI:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0.391(x_1 + x_2) - 2x_2 + 0.609y_\delta$$

$$u_\delta = x_1 + x_2 \quad (\text{Ecuación de salida})$$

y el sistema incierto  $y_\delta = \delta u_\delta$ , siendo  $\delta$  un sistema lineal variante en el tiempo “desconocido” del que sólo se sabe  $\|\delta\|_\infty \leq 1$ .

\*Por Teorema de Pequeña Ganancia, como la norma del sistema LTI es:  $A=[-2 \ 1; .391 \ -2+.391]$ ;  $B=[0; 0.609]$ ;  $C=[1 \ 1]$ ;  $\text{norm}(ss(A,B,C,0), 'inf')$  **0.643**, toda la familia de sistemas es estable, y por tanto el sistema no-lineal también.

\*En el control por planificación de ganancia se hace uso explícito de que sabemos que  $\delta = -0.6427 + 1.6427 \frac{\sin(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$  podría ser “medible” a la hora de diseñar un control  $u(x, \delta(t))$ . No así en control “robusto” clásico.



## Ejemplo (2)

*Embebiendo* la no linealidad en el modelo LTV

$\bar{f}(x_1(t)) = \delta(t)x_1(t)$ , con  $|\delta| \leq 1$ , las trayectorias del sistema original son un subconjunto de las de la “familia de sistemas” dados por la interconexión (LFT) de un sistema LTI:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0.391(x_1 + x_2) - 2x_2 + 0.609y_\delta$$

$$u_\delta = x_1 + x_2 \quad (\text{Ecuación de salida})$$

y el sistema incierto  $y_\delta = \delta u_\delta$ , siendo  $\delta$  un sistema lineal variante en el tiempo “desconocido” del que sólo se sabe  $\|\delta\|_\infty \leq 1$ .

\*Por Teorema de Pequeña Ganancia, como la norma del sistema LTI es:  $A=[-2 \ 1; .391 \ -2+.391]$ ;  $B=[0; 0.609]$ ;  $C=[1 \ 1]$ ;  $\text{norm}(\text{ss}(A,B,C,0), 'inf')$  **0.643**, toda la familia de sistemas es estable, y por tanto el sistema no-lineal también.

\*En el control por **planificación de ganancia** se hace uso explícito de que sabemos que  $\delta = -0.6427 + 1.6427 \frac{\sin(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$  podría ser “medible” a la hora de diseñar un control  $u(x, \delta(t))$ . No así en control “robusto” clásico.



## Ejercicio (caso de estudio) propuesto

- Modela un sistema masa-muelle-amortiguador de segundo orden, en vertical (efecto gravedad).

- Considera un muelle no-lineal cuya fuerza en función del incremento de longitud respecto a la longitud natural sea:

$$F_{muelle} = k_1 \cdot (l - l_{nat}) + k_3 \cdot (l - l_{nat})^3$$

- Linealiza alrededor de un punto de funcionamiento ( $M = 1$ ,  $c = 0.1$ ,  $k_1 = 3$ ,  $k_3 = 0.1$ ,  $l_{nat} = 0.5$ ).
- Obtén un modelo de sector de la no-linealidad y expresa el modelo resultante en formato LFT.
  - El modelo deberá ser, obligatoriamente, **local** en una zona alrededor del p.f. elegido: un polinomio cúbico no puede embeberse en un sector lineal en todo  $\mathbb{R}$ .



## Sección 4

# Modelado LFT con varios parámetros

Video-presentación disponible en:

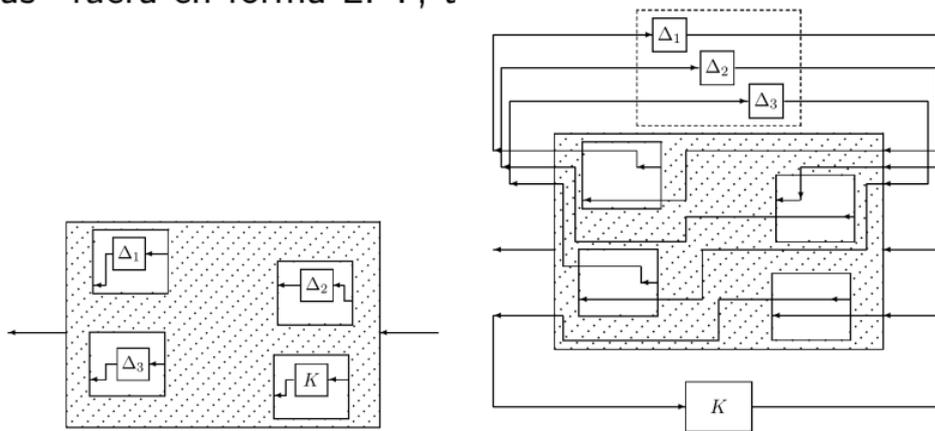
[personales.upv.es/asala/videos/lftr2.html](http://personales.upv.es/asala/videos/lftr2.html)



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

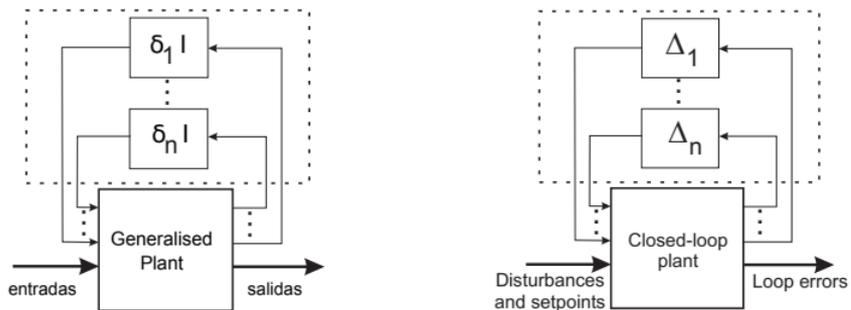
# Caso de varios parámetros inciertos

Múltiples fuentes de incertidumbre en el modelo pueden ser “sacadas” fuera en forma LFT, también controladores .



Figuras: (Zhou&Doyle, Essentials of Robust Control)

# Caso de varios parámetros inciertos



El bloque de incertidumbre, formalmente, tiene la estructura

$$\Delta = \text{blkdiag}(\delta_1 I, \delta_2 I, \dots, \delta_p I)$$



# Cómo se obtiene la representación LFT múltiple?

- Modelos de **primeros principios**, leyes físicas lineales en los parámetros  $\theta$ :
  - Se hacen las operaciones elementales en transparencias [13,16, 17, 18] a cada coeficiente incierto.
  - Se extraen las ecuaciones con las incertidumbres y se obtiene representación interna del resto (modelo inferior, planta generalizada).

- Modelos **ya manipulados**:

$$\dot{x} = A(\delta_1, \dots, \delta_p)x + B(\delta_1, \dots, \delta_p)u$$

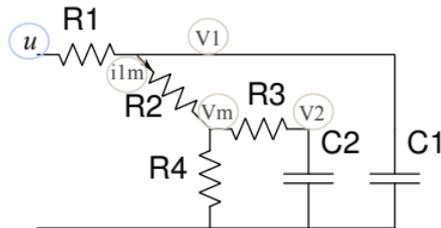
$$y = C(\delta_1, \dots, \delta_p)x + D(\delta_1, \dots, \delta_p)u$$

con  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$ ,  $D(\cdot)$  expresiones racionales-polinómicas de varias variables.

- Quitar denominadores, intentar factorizar, añadir variables intermedias...
- No hay teoría clara/sencilla de realización "mínima" **multi-dimensional**.



# Ejemplo Circuito Eléctrico (II)



Además de la incertidumbre en R2, modelemos C1 como un diodo “varicap” (capacidad variable –por ejemplo, elemento NXP Semiconductors, BB148–) de ecuaciones  $C_1(v) \frac{dv}{dt} = i$ ;

Por ejemplo, de la hoja de características, BB148 en un rango de funcionamiento entre 1 y 10

Voltios,  $C_1(v) \approx 40 - 30 \log_{10}(v)$  pF.

- Consideramos modelo **nominal** a 4.0 V; definimos  $\delta_c = C_1(v) - C_1(4.0)$ .  
\*Ver desarrollo Matlab\*



## Sección 5

# Conclusiones



# Conclusiones

- Incertidumbre, no-linealidad o variación temporal de parámetros se introducen en las ecuaciones de los modelos.
- Sacándolas del diagrama de bloques, el modelo incierto se expresa como una **LFT** entre un **modelo lineal invariante en el tiempo** y un **elemento diagonal por bloques incierto**.
- Cualquier expresión racional-polinomial de parámetros inciertos puede expresarse como LFT.

*La utilidad de la representación será para análisis de estabilidad o prestaciones robustas ante incertidumbre estructurada, y diseño de controladores para esos sistemas utilizando **técnicas lineales** y **teorema de pequeña ganancia** (escalado).*

