

Modelado de motor eléctrico CC + reductora

©2024, Antonio Sala, UPV

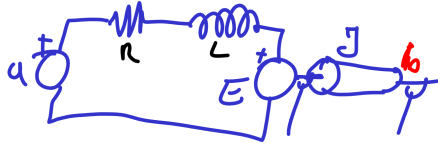
Presentación en vídeo

<https://personales.upv.es/asala/YT/V/moteng.html>,

<https://youtu.be/Nah5rdkhvvo>

1 Motor eléctrico 1 eje, sin engranaje

Motor CC (excitación independiente), esquema simplificado:



Entrada u , aplicación: control de ‘velocidad’ (la posición angular no es ‘observable’ si sólo voy a considerar velocidad). SEIS ecuaciones y seis incógnitas (V_R , V_L , E , T , i , ω):

$$u = V_R + V_L + E \quad (1)$$

$$V_R = R \cdot I \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} V_L \quad (3)$$

$$E = k \cdot \omega \quad (4)$$

$$T = k \cdot I \quad (5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} (T - b\omega) \quad (6)$$

Nota: en una aplicación de ‘control de posición del eje’, la posición angular debería incorporarse al modelo añadiendo la ecuación $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (una ecuación más y una incógnita más, el modelo seguiría siendo correcto). No lo vamos a hacer aquí por brevedad. Formalmente, se dice que la variable de estado θ no es *observable* si únicamente disponemos de medidas de velocidad angular y amperímetro.

1.1 Representación interna (ec. estado):

Debemos eliminar V_R , V_L , E , T y dejarlo todo en función de entrada ‘ u ’ y estados (I , ω). Sustituyendo las ecuaciones (1,2,4) en (3) y sustituyendo (5) en

(6), resulta:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} (u - RI - k\omega) \quad (7)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} (kI - b\omega) \quad (8)$$

Forma matricial $x = [I; \omega]$:

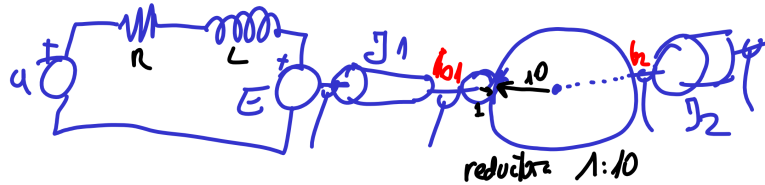
$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -R/L & -k/L \\ +k/J & -b/J \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (9)$$

Ecuación de salida: Depende de cada aplicación, la variable o variables que les interese al cliente. Si, por ejemplo, al cliente/usuario le interesara el par motor y la corriente en la resistencia $y = [T; I]$, añadiríamos:

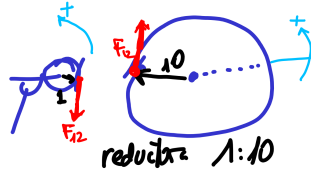
$$y = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (10)$$

para indicar a la teoría o el software de simulación que calcule y represente dichas salidas una vez resuelva (9) que es donde está la física del intercambio de energía.

2 Motor eléctrico con 2 ejes unidos por reductora 10:1



Añadiríamos la dinámica del eje 2, la fuerza de interacción entre los ejes F_{12} y la relación de transmisión 1:10 (mirad la figura más abajo para comprender el significado de F_{12}).



Nota: yo ya voy a comenzar por las ecuaciones de estado anteriores [(7)–(8)] que resumen 6 ecuaciones en 2, por simplicidad (no es obligatorio hacerlo así, obviamente, podríais modelar adaptando [(1)–(6)]). Esto presupone que las cuatro variables eliminadas (V_L , V_R , E , T) al pasar a variables de estado no son de interés para mí. Si no, debería mantener sus ecuaciones (o recuperarlas al escribir ecuaciones de salida).

Partiremos, por tanto, de:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} (u - RI - k\omega_1) \quad (11)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1} (kI - b_1\omega_1 - F_{12} \cdot 1) \quad (12)$$

donde, al haber dos velocidades angulares, he cambiado ω en (8) por ω_1 . A esas ecuaciones adjuntamos:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{J_2} (-b_2\omega_2 - F_{12} \cdot 10) \quad (13)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{10}\omega_1 \quad (14)$$

Donde los pares son 10 veces mayores en el eje 2 ($F_{12} \cdot 10$) pero las velocidades angulares son 10 veces más pequeñas. Este nuevo modelo [(11)–(14)] de 4 ecuaciones y 4 incógnitas ($I, \omega_1, \omega_2, F_{12}$) ya está completo (pero no es ‘normalizado’).

Signos: suponemos positivo como rotación ‘antihoraria’. Los signos son correctos porque: (a) los rozamientos van en sentido contrario de la velocidad, (b) los ejes giran en sentido contrario y, (c) cuando $F_{12} > 0$ empuja al eje 1 en el sentido ‘negativo’ y también lo hace así sobre el eje 2, según se ve en la figura de arriba.

2.1 Ecuación de estado normalizada

Debido a (14) las dos velocidades angulares no son ‘independientes’: tienen una ‘ligadura cinemática’ y de hecho sólo hay UN ‘grado de libertad mecánico’: aunque conceptualmente tanto ω_1 como ω_2 son ‘estados’ (almacenan energía cinética), existe una representación del modelo matemático donde sólo aparece uno de ellos. En efecto, podemos eliminar ω_2 dado que es una función lineal de ω_1 (o bien eliminar ω_1 , dependiendo de si queremos la reducción ‘por el lado del motor’ o ‘por el lado de la carga J_2 ’). En teoría de sistemas lineales, hacer esto se llama obtener la *realización mínima*.

Yo he decidido eliminar ω_2 : busco la dinámica equivalente ‘por el lado del motor’, esto es, la dinámica de ω_1 .

Primero, seguro que la representación interna normalizada necesitará eliminar F_{12} , haciendo que (13) se reescriba como:

$$\frac{d}{dt}(-\omega_1/10) = \frac{1}{J_2} (-b_2\omega_2 - F_{12} \cdot 10) \quad (15)$$

Llamaremos $N = 10$, y escribiremos las ecuaciones en función de N para dejarlo válido para cualquier relación de transmisión. En vez de usar (15) para nuestro modelo concreto (que sería perfectamente válido), usaremos la letra N y sustituiremos $\omega_2 = -\omega_1/N$ en (13) de modo que tendremos:

$$\frac{d}{dt}(-\omega_1/N) = \frac{1}{J_2} (-b_2 \cdot (-\omega_1/N) - F_{12} \cdot N) \quad (16)$$

O sea, multiplicando por $-N$ ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_2}(-b_2\omega_1 + F_{12} \cdot N^2) \quad (17)$$

De modo que igualando con el lado derecho de (12) sale:

$$\frac{1}{J_1}(kI - b_1\omega_1 - F_{12} \cdot 1) = \frac{1}{J_2}(-b_2\omega_1 + F_{12} \cdot N^2) \quad (18)$$

y, despejando F_{12} y operando, resulta:

$$F_{12} = \frac{1}{J_1 N^2 + J_2} (J_1 b_2 \omega_1 - J_2 b_1 \omega_1 + J_2 k I) \quad (19)$$

y sustituyendo en (12), resulta, tras hacer operaciones para dejarlo 'bonito':

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1 + J_2/N^2} \left(kI - b_1\omega_1 - \frac{b_2}{N^2}\omega_1 \right) \quad (20)$$

Por tanto, las ecuaciones de estado normalizadas finales son:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} (u - RI - k\omega_1) \quad (21)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1 + J_2/N^2} \left(kI - (b_1 + \frac{b_2}{N^2})\omega_1 \right) \quad (22)$$

siendo $J_{eq} := J_1 + J_2 \cdot \frac{1}{N^2}$ denominado 'momento de inercia equivalente' y $b_{eq} := b_1 + \frac{b_2}{N^2}$ denominado 'coeficiente de rozamiento equivalente'.

Nota: el resultado es coincidente con la 'regla' de ingeniería mecánica de que las inercias al otro lado de la reductora se dividen por N^2 , y los pares se dividen por N (en efecto, el rozamiento en el eje 2, $F_{roz2} = b_2\omega_2$, acaba siendo en términos 'equivalentes sobre eje 1' de $F_{roz2}/N = b_2\omega_2/N = b_2\omega_1/N^2$, signos aparte. Por eso, si N es grande, la reductora básicamente 'aisla' al motor del mundo y la inercia y rozamiento equivalentes son casi iguales a J_1 y b_1 , respectivamente: la dinámica del motor será 'casi' independiente de la carga en el eje 2 para N suficientemente grande.

En forma matricial, sería:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R/L & -k/L \\ +k/J_{eq} & -b_{eq}/J_{eq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \omega_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (23)$$

Obviamente, el modelo debería ser completado con las ecuaciones de salida que fueran necesarias para cada aplicación (detalles omitidos por brevedad).

2.2 Par de carga (perturbación)

Si en el balance de pares yo añadiera un par de carga sobre el eje 1, llamémoslo $T_{load,1}$ (o sobre el eje 2 $T_{load,2}$ transformando al eje 1 como sigue), tendríamos:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1}(kI - b_1\omega_1 - F_{12} + T_{load,1}) \quad (24)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{J_2}(-b_2\omega_2 - F_{12} \cdot N + T_{load,2}) \quad (25)$$

de modo que, sustituyendo $\omega_2 = \omega_1/N$ y multiplicando por N ambos miembros de la segunda ecuación tendría:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_2}(-b_2\omega_1 - F_{12} \cdot N^2 + T_{load,2} \cdot N) \quad (26)$$

Con lo que, igualando $\dot{\omega}_1$, queda:

$$\frac{1}{J_1}(kI - b_1\omega_1 - F_{12} + T_{load,1}) = \frac{1}{J_2}(-b_2\omega_1 + F_{12} \cdot N^2 + T_{load,2} \cdot N) \quad (27)$$

y resolviendo F_{12} :

$$F_{12} = \frac{J_1 b_2 \omega_1 - J_1 T_{load,2} N + J_2 k I - J_2 b_1 \omega_1 + J_2 T_{load,1}}{J_2 + J_1 N^2} \quad (28)$$

para que sustituida en (24) resulte:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{J_1 + \frac{J_2}{N^2}} \cdot \left(kI - (b_1 + \frac{b_2 \omega_1}{N^2})\omega_1 + T_{load,1} + \frac{T_{load,2}}{N} \right) \quad (29)$$

En forma matricial, tendríamos

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R/L & -k/L \\ +k/J_{eq} & -b_{eq}/J_{eq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ \omega_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{eq}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ T_{load,eq} \end{pmatrix} \quad (30)$$

donde $T_{load,eq} := T_{load,1} + \frac{1}{N}T_{load,2}$.