Normas de Señales y Sistemas

Antonio Sala

Notas sobre Control de Sistemas Complejos

Video-presentación disponible en: personales.upv.es/asala/videos/**norms**.html (16:28)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación: Muchos problemas de control se consideran resueltos si determinadas señales son suficientemente "pequeñas" (errores de bucle, acciones de control o combinaciones de ellas).

- Sentido determinista: integral, valor máximo, cuadrado,...
- Sentido estadístico: media, varianza, ...

Obviamente, el "tamaño" de una señal, en un sistema lineal será proporcional al tamaño de la entrada, y también dependerá de la "forma de onda" de dicha entrada (escalón, senoidal, ruido blanco/coloreado).

Objetivo: Formalizar estos conceptos.

Contenidos: normas de vectores, normas de señales, normas de sistemas.

©2020 Antonio Sala

Normas de vectores

Propiedades, $a \in \mathbb{R}^n$, escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$

Ejemplos de Normas:

- Euclídea $\|a\|_2 := \sqrt{a^T a}$.
- Máximo $\|a\|_\infty := max_i |a_i|$
- Suma $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|$
- Otras $\|a\|_p = (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

 ©2020 Antonio Sala

Normas de sistemas lineales **estáticos**

Los sistemas lineales estáticos mapean un vector en otro $S : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$.
Pueden expresarse como matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$, $y_{m\times 1} = S_{m\times n} u_{n\times 1}$.
Normas "inducidas" ($\approx$ ganancia máxima [peor caso]):

$$\|S\|_{p\mapsto q} := \sup_{\|u\|_p=1} \|Su\|_q$$

Ejemplos:

$$\|S\|_{2\mapsto 2} := \sup_{\|u\|_2=1} \|Su\|_2 = \overline{\sigma}(S)$$

$$\|S\|_{\infty\mapsto\infty} := \sup_{\|u\|_\infty=1} \|Su\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |s_{ij}|$$

Otras "normas" no inducidas (no tienen significado de "ganancia"):

$$\|S\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2} = \sqrt{traza(S^T S)}, \qquad \rho(S) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(S)|$$

Frobenius — espectral si S cuadrada

©2020 Antonio Sala

Normas de señales deterministas

- (semi)Norma Euclídea: Integral del cuadrado

$$\|u\|_2 := \sqrt{\int_0^\infty u^T(t)u(t)\,dt}$$

  - Debe tender a cero para que la integral exista (señal **no persistente**).
- Norma del máximo:

$$\|u\|_\infty := \sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_\infty$$

- Cota de potencia root mean square (RMS):

$$\|u\|_{RMS} := \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^T(t)u(t)\,dt}$$

- Otras opciones menos usadas... (integral valor absoluto, ...)

Señales discretas: suma en vez de integral.

©2020 Antonio Sala

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Entradas aleatorias

*Consideraremos señal **estacionaria** (media cero y varianza constante).

- Ruido blanco: totalmente impredecible, tiene energía constante a todas las frecuencias... power spectral density $PSD(\omega) = 1 \, \forall \omega$.
  - No puede existir físicamente (ancho banda infinito) en tiempo contínuo.
  - En tiempo discreto, sí: $\mathcal{N}(0, 1)$ en cada muestra.

- Ruido coloreado: parcialmente predecible, tiene más energía a unas frecuencias que a otras.
  - Se puede expresar como la salida y de un sistema dinámico $G(s)$ ante un ruido blanco u de entrada.
  - Power spectral density $|G(j\omega)|^2$.
  - Varianza $E(y^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega$, Desv. típica $= \sqrt{\text{varianza}}$.
  - Potencia en un cierto intervalo de frecuencias: $\sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{w_1}^{w_2} |G(j\omega)|^2 d\omega}$

*Normalmente, se supone el efecto del "ruido de medida" (sensores) como ruido blanco (coloreado de mucho ancho de banda, para simulación), y el efecto del "ruido de proceso" sobre las salidas controladas como ruido coloreado.

©2020 Antonio Sala

Normas de sistemas dinámicos lineales: norma 2

- Norma $\mathcal{H}_2$: $\|G\|_2$,
  - Señales con ruido:
    - SISO: desviación típica de la salida cuando entrada ruido blanco de $PSD(\omega) = 1$.
    - MIMO: raíz cuadrada de la variación total (suma de varianzas).
  - Raiz de integral $\sqrt{\lim_{T\to\infty} \int_0^T y^T(t)y(t)\,dt}$ con entrada determinista impulso.
    - Relacionado con el control LQR $\int_0^\infty x^T Qx + u^T Ru\,dt$, con:
    $$y = \begin{pmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$
  - Raíz de Integral del cuadrado del módulo de la resp. en frecuencia (si G estable),
  $$\|G(s)\|_2 := \sqrt{\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} traza(G^H(j\omega)G(j\omega))\,d\omega}$$
- Comando `norm` en Matlab/octave: `norm(G,2)`.

Nota: `norm(G)` es lo mismo que `norm(G,2)`.

©2020 Antonio Sala

Normas de sistemas dinámicos lineales: norma ∞

- Norma $\mathcal{H}_\infty$: $\|G\|_\infty := \max_{\|u\|_2=1} \|Gu\|_2$
  - si G es un sistema estático, $\|G\|_\infty = \bar{\sigma}(G)$.
  - si G es inestable todas las normas valen ∞.
  - si G es estable la norma infinito es el pico de resonancia, $\|G\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega))$.

- Relacionado con "entrada peor caso": entrada no aleatoria/impulsional como en transp anterior, sino la que mayor efecto tiene en la salida.
  - Caso lineal: concentrar toda la energía en la frecuencia de mayor ganancia.

- Matlab: norm(G,inf)

 ©2020 Antonio Sala

Conclusiones

- Normas de señales: se interpretan como "tamaño" de una señal.
- Normas de sistemas lineales: se interpretan como "ganancia máxima" (tamaño máximo cuando entrada tiene norma 1).
- Múltiples definiciones posibles.
  - Las más comunes: norma 2 de señales deterministas / varianza de aleatorias; normas 2 e ∞ de sistemas lineales.
  - Relación con la transformada de Fourier de las señales, y con la matriz de transferencia $G(j\omega)$ de los sistemas.

 ©2020 Antonio Sala