Estimación del estado: Observadores por asignación de polos

Antonio Sala

Depto. Ingeniería de Sistemas y Automática
Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**obsap**.html

Motivación y objetivos

Motivación:

- Para poder controlar un proceso debe saberse su "estado interno", pero en algunos casos no se dispone de medidas directas del mismo, sino de salidas contaminadas por ruido.

Objetivos:

- Comprender las ecuaciones de un observador del estado lineal; aprender a calcular ganancias del mismo por asignación de polos.

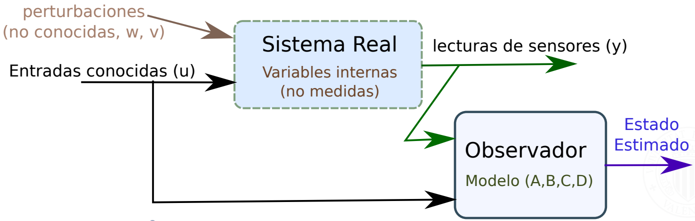
Contenido:

- Planteamiento del problema, metodología, ejemplo

Concepto de observador

El estado interno "$x(t)$" es inaccesible. Sólo se conoce $(u(t), y(t))$. Se desea estimar qué pasa en el proceso (valor aproximado de x) para poder predecir trayectorias futuras o llevarlo a un punto de funcionamiento (control).

Observador: Sistema dinámico al que le entran $(u(t), y(t))$ y calcula una salida $\hat{x}(t)$ de modo que el **error de observación** $e := \hat{x} - x$ es "pequeño", suponiendo que el sistema real se rige por un modelo conocido.



Ecuación básica

* Suponemos $D = 0$, medida $y = Cx$, sin pérdida de generalidad (hacer cambio $y_{new} = y_{old} - Du$ si es necesario).

1) Observador continuo:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \overbrace{A\hat{x} + Bu}^{predictor} + \overbrace{L \cdot (y - C\hat{x})}^{corrector}$$

2.a) Observador discreto:

$$\hat{x}_{t+1} = \overbrace{A\hat{x}_t + Bu_t}^{predictor} + \overbrace{L \cdot (y_t - C\hat{x}_t)}^{corrector}$$

2.b) Observador discreto "adelantado":

$$\hat{x}_{t+1} = \overbrace{A\hat{x}_t + Bu_t}^{predictor} + \overbrace{L \cdot (y_{t+1} - C(A\hat{x}_t + Bu_t))}^{corrector}$$

En todas estas ecuaciones $\hat{x}$ es el **estado interno** del observador.
La matriz L tiene dimensiones (*número de estados*)×(*número de sensores*).

Dinámica del error de observación

1) Observador continuo:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \overbrace{A\hat{x} + Bu}^{predictor} + \overbrace{L \cdot (y - C\hat{x})}^{corrector}$$

Ecuaciones del proceso: $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$ [Hemos supuesto RUIDO=0]

$$\frac{d}{dt}(\hat{x} - x) = (A\hat{x} + Bu) - (Ax + Bu) + L \cdot (Cx - C\hat{x})$$

que resulta en:

$$\frac{de}{dt} = (A - LC)e$$

Parámetro de diseño: matriz de ganancia L del corrector.

Asignación de polos (caso continuo)

Los **polos** de la dinámica del error un sistema $\frac{de}{dt} = (A - LC)e$, son los **autovalores de** $A - LC$, esto es, las raíces de la ecuación característica

$$det(sI - (A - LC)) = 0$$

Prestaciones deseadas de un observador por asignación de polos:

- Estabilidad: parte_real<0
- Tiempo de establecimiento (tiempo que tarda el error a ser un 5% de lo que fuera inicialmente): $4/|$parte_real$|$

Asignación de polos: Diseñar una ganancia de corrección L para que los polos de $(A - LC)$ estén en posiciones o zonas prefijadas.

Asignación de polos (caso continuo)

Los **polos** de la dinámica del error un sistema $\frac{de}{dt} = (A - LC)e$, son los **autovalores de** $A - LC$, esto es, las raíces de la ecuación característica

$$det(sI - (A - LC)) = 0$$

Prestaciones deseadas de un observador por asignación de polos:

- Estabilidad: parte_real<0
- Tiempo de establecimiento (tiempo que tarda el error a ser un 5% de lo que fuera inicialmente): 4/|parte_real|

Asignación de polos: Diseñar una ganancia de corrección L para que los polos de $(A - LC)$ estén en posiciones o zonas prefijadas.

Metodología de asignación de polos

1. Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.
2. Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (s - \lambda_n)$
3. Planteando los elementos de la matriz L como incógnitas, resolver el sistema $det(sI - (A - LC)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, C) sea **observable**.

Metodología de asignación de polos

1. Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

2. Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (s - \lambda_n)$

3. Planteando los elementos de la matriz L como incógnitas, resolver el sistema $det(sI - (A - LC)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, C) sea **observable**.

*Es posible que la solución no sea única (casi siempre con múltiples sensores): problema ¿cuál de todas elegir?.

Metodología de asignación de polos

1. Escoger unas posiciones de los polos con características de tiempo de establecimiento / amortiguamiento según especificaciones del problema $p_{des} := [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.

2. Construir una ecuación característica deseada $P_{des}(s) := (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (s - \lambda_n)$

3. Planteando los elementos de la matriz L como incógnitas, resolver el sistema $det(sI - (A - LC)) = P_{des}(s)$.

*Para que el sistema de ecuaciones tenga solución, necesario que el par (A, C) sea **observable**.

*Es posible que la solución no sea única (casi siempre con múltiples sensores): problema ¿cuál de todas elegir?.

Ejemplo

Sea el sistema:
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Consideremos disponible un sensor $y = x_2 = (0\ 1)x$, y planteemos un observador continuo (transp. 4), considerando:
$$L_{2\times 1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

La dinámica del error es:
$$\dot{e} = A_{obs}e = (A - LC)e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 - l_1 \\ 1 & -3 - l_2 \end{pmatrix} e$$

Ecuación característica:
$$0 = det(sI - A_{obs}) = det\left(\begin{pmatrix} s & 1 + l_1 \\ -1 & s + 3 + l_2 \end{pmatrix}\right) = s^2 + (l_2 + 3)s + (l_1 + 1)$$

Tiempo establecimiento deseado: 1 segundo. $4/|polo| = 1$, polo_deseado=-4.
Ecuación característica deseada $0 = (s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$. **Solución:** $l_2 + 3 = 8$, $l_1 + 1 = 16$, esto es $\Rightarrow$ $l_1 = 15$, $l_2 = 5$.

Observadores discretos

2.a) Observador discreto:

$$\hat{x}_{t+1} = \overbrace{A\hat{x}_t + Bu_t}^{predictor} + \overbrace{L \cdot (y_t - C\hat{x}_t)}^{corrector}$$

Restando $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$, considerando $y_t = Cx_t$ tenemos:

$$e_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t - (Ax_t + Bu_t) + L \cdot (Cx_t - C\hat{x}_t) = (A - LC)e_t$$

Objetivo: asignar los polos de $A - LC$ en las posiciones adecuadas dentro del círculo unidad eligiendo la matriz L.

Observadores discretos (2)

2.b) Observador discreto "adelantado":

$$\hat{x}_{t+1} = \overbrace{A\hat{x}_t + Bu_t}^{\text{predictor}} + \overbrace{L \cdot (y_{t+1} - C(A\hat{x}_t + Bu_t))}^{\text{corrector}}$$

Restando $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$, considerando $y_{t+1} = Cx_{t+1} = C(Ax_t + Bu_t)$ tenemos que $e = \hat{x} - x$ verifica:

$$e_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t - (Ax_t + Bu_t) + L \cdot (C(Ax_t + Bu_t) - C(A\hat{x}_t + Bu_t)) = (A - LCA)e_t$$

Objetivo: asignar los polos de $A - LCA$ en las posiciones adecuadas dentro del círculo unidad eligiendo la matriz L.

Discusión y Conclusiones

- Técnica algebraica relativamente sencilla para resolver problemas de estimación de variables no medidas.
- Los *polos deseados* son los parámetros de diseño ($\approx t_{est}$). Es el tiempo en que se tarda en tener unos estimados confiables $\approx$ tiempo durante el que se promedia medidas anteriores (tiempo de filtrado).
- Metodología válida tanto en sistemas contínuos como discretos.
- Inconvenientes*:
  - Puede tener soluciones múltiples o no tenerlas (no observable).
  - No tiene en cuenta saturación de sensores, no puede asignar tiempos de establecimiento diferentes a diferentes estimaciones.
  - No se consideran perturbaciones (ruido de proceso), ruidos de medida, ni errores de modelado.

*Solventados, algunos de ellos, mediante observadores óptimos (filtro de Kalman), observadores robustos...