

Teorema de Pequeña Ganancia

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/OApeqga.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Motivación y objetivos

Motivación:

- Determinados elementos de bucles de control son “incierto” y sólo se conoce una “cota” de su “ganancia”.

Objetivo:

- Valorar la importancia y utilidad del teorema de pequeña ganancia para control robusto,
- Desarrollar los principales aspectos de su demostración,
- Identificar las condiciones en las que el teorema puede aplicarse para determinar si bucles de control incorporando elementos conocidos y elementos “incierto” son estables (estabilidad “robusta”).

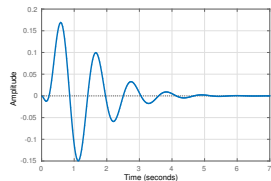
Contenido:

- Revisión de normas de señales y sistemas,
- Enunciado,
- Demostración,
- Discusión y ejercicios propuestos.



Revisión de conceptos (normas)

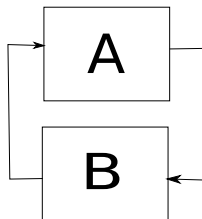
- Norma **2** de **señal**: $\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty u(t)^T \cdot u(t) dt}$
 - Señal **no-persistente**: si $\|u\|_2 < \infty$ (norma 2 existe y es acotada), entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$.
 - Desig. Triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



- Norma **infinito** (ganancia máxima) de un **sistema** (en pto funcionamiento tal que $G(0) = 0$): $\|G\|_\infty := \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|G(u)\|_2}{\|u\|_2}$.
 - Desig. submultiplicativa: $\|G(u)\|_2 \leq \|G\|_\infty \cdot \|u\|_2$
 - **Estabilidad BIBO** (*Bounded Input Bounded Output*):
Si $\|G\|_\infty < \infty$, la salida ante c.i.=0 y una entrada acotada en norma 2 también está acotada, esto es, si la entrada está acotada en norma 2, tanto entrada como salida tienden a cero.

Teorema de Pequeña Ganancia

- Si A y B son operadores **estables BIBO** (esto es, $\|A\|_\infty < \infty$, $\|B\|_\infty < \infty$) y, además, $\|A\|_\infty \|B\|_\infty < 1$ entonces la interconexión en bucle cerrado en la figura es **estable**:

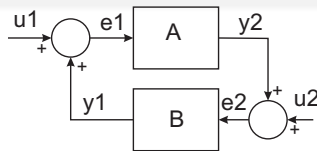


- A , B pueden ser no lineales, inciertos...
 - otra cosa es que calcular la norma sea “fácil”: sólo lo es para sistemas lineales, en general.



Teorema de Pequeña Ganancia: Demostración

Diagrama de bloques:



$$\|y_2\|_2 \leq \|A\|_\infty \|e_1\|_2, \quad \|e_1\|_2 \leq \|u_1\|_2 + \|y_1\|_2$$

$$\|y_1\|_2 \leq \|B\|_\infty \|e_2\|_2, \quad \|e_2\|_2 \leq \|u_2\|_2 + \|y_2\|_2$$

Todo junto:

$$\|y_2\|_2 \leq \|A\|_\infty (\|u_1\|_2 + \|y_1\|_2) \leq \|A\|_\infty (\|u_1\|_2 + \|B\|_\infty \|e_2\|_2)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|y_2\|_2 &\leq \|A\|_\infty (\|u_1\|_2 + \|B\|_\infty (\|y_2\|_2 + \|u_2\|_2)) \\ &= \|A\|_\infty \|B\|_\infty \|y_2\|_2 + \|A\|_\infty (\|B\|_\infty \|u_2\|_2 + \|u_1\|_2) \end{aligned}$$

con lo que

$$(1 - \|A\|_\infty \|B\|_\infty) \|y_2\|_2 \leq \|A\|_\infty (\|B\|_\infty \|u_2\|_2 + \|u_1\|_2)$$

Pág. anterior: $(1 - \|A\|_\infty \|B\|_\infty) \|y_2\|_2 \leq \|A\|_\infty (\|B\|_\infty \|u_2\|_2 + \|u_1\|_2)$

- Si $(1 - \|A\|_\infty \|B\|_\infty) > 0$

$$\|y_2\|_2 \leq \frac{\|A\|_\infty (\|B\|_\infty \|u_2\|_2 + \|u_1\|_2)}{(1 - \|A\|_\infty \|B\|_\infty)} \leq \infty$$

La salida y_2 está acotada si las entradas u_1 y u_2 lo están: el bucle es **BIBO ESTABLE**.

- Si $(1 - \|A\|_\infty \|B\|_\infty) < 0$

$$\|y_2\|_2 \geq \frac{\|A\|_\infty (\|B\|_\infty \|u_2\|_2 + \|u_1\|_2)}{(1 - \|A\|_\infty \|B\|_\infty)} \geq -\infty$$

Inútil: el lado derecho es negativo (num. +, denom. -), por lo que simplemente, por ejemplo, prueba $\|y_2\|_2 \geq -8\dots$ pero por definición $\|y_2\|_2 \geq 0$ por lo que no aporta nada. **No se puede probar que $\|y_2\|_2$ sea "pequeña", necesario para estabilidad.**



Tma. Pequeña Ganancia: Discusión

- **Garantiza** estabilidad:

- Válido para sistemas no-lineales, variantes en el tiempo...

si es que $\|\cdot\|_\infty$ se puede calcular!

Ejercicio propuesto: *comprobad con el tma. que que la interconexión de $[A]$ $y_2 = \sin(e_1)$ y de $[B]$ $y_1(s) = 10/(s^2 + 2 * s + 30)e_2(s)$ es estable.*

**Pista: $y_2 = \left(\frac{\sin(e_1)}{e_1}\right) \cdot e_1$, $\|A\|_\infty = \sup_{e_1 \in \mathbb{R}} \sin(e_1)/e_1$, $\|B\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|$.*

- Es sólo “condición suficiente” (**conservativo**):

- existen sistemas **estables** donde $\|A\|\|B\| \geq 1$

$$A = 5, \quad B(s) = 4/(s + 1)$$

Ejercicio propuesto: *comprobad que polos b.c. en $s = -21$.*

- existen bucles estables con elementos inestables

Ejercicio propuesto: *Comprobad con control proporcional $K = 7$ de $1/(s - 1)$.*

- No tiene en cuenta estructura/variabilidad o no en el tiempo de los elementos A o B .

Existen versiones más avanzadas que sí.

Conclusiones

- El Tma. pequeña ganancia permite establecer condiciones **suficientes** de estabilidad, para sistemas no-lineales, variantes en el tiempo, etc.
- Básicamente, si la ganancia en bucle abierto es menor de 1 y el bucle abierto es estable, el bucle cerrado es estable.
- Se usa profusamente en control robusto cuando uno de los sistemas es “incierto” pero se conoce una “cota de ganancia” de dicho sistema.
- Existen versiones menos conservativas.