

Pasividad (sistemas dinámicos): definiciones y ejemplos

Antonio Sala Piqueras

Control de sistemas complejos

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)
Universitat Politècnica de València (UPV)

Presentación en vídeo: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/paskh.html> ,
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/paskhrc.html>



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Presentación

Motivación:

La disipación neta de energía parece “sinónimo” de estabilidad. En muchos modelos físicos, se puede asegurar que ciertos elementos aunque sean inciertos son “pasivos” (resistencia, fricción).

Objetivos:

Comprender el significado del concepto de pasividad de sistemas dinámicos en representación interna (ec. estado + ec. salida), y el “exceso” de pasividad (input/output/state).

Contenidos:

Definiciones. Ejemplos de sistemas dinámicos pasivos. Conclusiones.



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Pasividad

Khalil, Nonlinear Systems

Supongamos que existe una función $V(x) \geq 0$ para todo x ... tal que:

- **Pasivo:** $u^T y \geq \dot{V}(x) \quad \int_0^T u^T y dt \geq -V(0) = -\beta$
- **Conservativo:** $u^T y = \dot{V}(x)$

Exceso de pasividad:

Resistencia mínima, rozamiento mínimo, ...

- **Estrictamente input pasivo:**

$\alpha > 0$

$$u^T y \geq \dot{V} + \alpha u^T \phi(u), \quad u\phi(u) > 0 \text{ si } u \neq 0$$

Con func. cuadráticas, versión integral: $\int_0^T u^T y dt \geq \alpha \int_0^T u^T u dt - \beta$

- **Estrictamente output pasivo:**

$\alpha > 0$

$$u^T y \geq \dot{V} + \alpha y^T \phi(y), \quad y\phi(y) > 0 \text{ si } y \neq 0$$

Con func. cuadráticas, versión integral: $\int_0^T u^T y dt \geq \alpha \int_0^T y^T y dt - \beta$

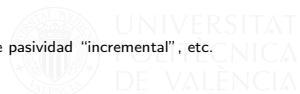
- **Estrictamente (estado) pasivo**: $u^T y \geq \dot{V} + \phi(x)$, $\phi(x) > 0$ si $x \neq 0$.

Estabilidad:

(buscamos un p.f. $u = 0$, $y = 0$, $x = 0$)

- Los sistemas estrictamente (estado) pasivos son asintóticamente estables con $u = 0$. Prueba a partir de $\dot{V} \leq -\phi(x) < 0$ si $x \neq 0$.
- Los sistemas estrictamente output pasivos + **zero-state observables** (si $u(t) = 0$, $y = \dot{y} = \ddot{y} = \dots = 0$ implica $x = 0$) son asintóticamente estables con $u = 0$.
- Los sistemas estrictamente input pasivos pueden no ser estables (ser sólo “marginalmente” estables).
 - Con $u = 0$, $\dot{V} \leq 0$, la energía almacenada no aumenta, pero puede no disminuir.

Otros autores requieren también estabilidad en “input passive”, hablan de pasividad “incremental”, etc.



Ejemplos 1

- Integrador $y(s) = \frac{1}{s}u(s)$, ec. estado $\frac{dx}{dt} = u$, ec. salida $y = x$

Verifica, con $V = \frac{1}{2}x^2$, que $\frac{dV}{dt} = x \frac{dx}{dt} = xu = yu$.

Es pasivo, y en particular “conservativo”.

- El sistema $y(s) = \frac{1}{s+a}u(s)$, ec. estado $\frac{dx}{dt} = -ax + u$, ec. salida $y = x$

Con $V = \frac{1}{2}x^2$, verifica, con $a > 0$ que

$$\frac{dV}{dt} = x \frac{dx}{dt} = x \cdot (-ax + u) = -ax^2 + yu \text{ de modo que } yu = \frac{dV}{dt} + ax^2.$$

Es strictly (state) passive.



Pasividad a partir de modelado físico

Supongamos que, a partir de un modelo, podemos hacer un **balance de potencias** en un proceso físico (V es energía almacenada):

$$\text{Pot. entrada} = \dot{V} + \text{pot. disipada (resistencias, fricción)}$$

$$u^T y = \frac{dV}{dt} + \xi(x, u)$$

Entonces, podemos decir:

- ① $u^T y \geq \frac{dV}{dt} + \psi(x)$, siendo $\psi(x) := \inf_u \xi(x, u)$. Si $\psi(x)$ es positiva definida ($\psi(x) > 0$ si $x \neq 0$) entonces será estrictamente (state) pasivo.
- ② $u^T y \geq \frac{dV}{dt} + \chi(u)$, siendo $\chi(u) := \inf_x \xi(x, u)$. Si $\chi(u)$ es positiva definida entonces será estrictamente input pasivo.
- ③ Si la potencia disipada pudiera ser acotada por $\xi(x, u) \geq \eta(y)$, $\eta(y) > 0$ si $y \neq 0$, sería estrictamente output pasivo.

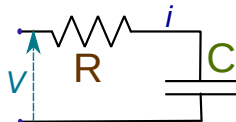
*Estrictamente pasivo se entenderá como el primero de los casos.

Ejemplo: circuito RC serie

Entrada V , salida i (conductancia)

*Como V es tensión en los circuitos eléctricos, denominaremos E a la energía almacenada.

Consideremos circuito RC serie, entrada V , salida i , estado V_c , energía potencial electrostática $E = \frac{C}{2} V_c^2$:



$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} i,$$

$$i = (V - V_c)/R$$

$$\frac{dE}{dt} = C V_c \frac{dV_c}{dt} = V_c i$$

- Es pasivo

$$V i = V \frac{(V - V_c)}{R} = (V - V_c)^2 / R + V_c (V - V_c) / R = (V - V_c)^2 / R + \frac{C}{2} \frac{dV_c^2}{dt}$$

por tanto $V^T i \geq \frac{C}{2} \frac{dV_c^2}{dt}$.

- Es estrictamente output pasivo: $(V - V_c)^2 / R = R i^2$.
- No es estrictamente input pasivo: $\min_{V_c} (V - V_c)^2 / R = 0$.
- No es estrictamente (state) pasivo: $\min_V (V - V_c)^2 / R = 0$, con lo que no podemos dar un $\phi(x) > 0$.

Pasividad **vs.** estabilidad del RC serie

- El sistema es estable $i(s) = \frac{C_s}{RCs+1} \cdot V(s)$, según teoría lineal
- Por pasividad también se prueba estabilidad (el condensador se descarga) con $V = 0$:
 - es estrictamente output pasive (disipa Ri^2)
 - $V = 0, i = 0$ implica $V_c = 0$ (zero-state observable)

con ello se concluye estabilidad: sólo dejará de disipar con $V = 0$ cuando el condensador esté descargado.

* El razonamiento por pasividad no ha necesitado de “polos” en el dominio de Laplace: hubiese sido válido incluso con resistencia no-lineal siendo i una función de V_R tal que $iV_R > 0$ si $i \neq 0$.

Circuito RC, con entrada i y salida V

(impedancia)

Si consideramos entrada i , salida V ,

- es pasivo porque $Vi = (V_c + Ri)i = Ri^2 + \frac{C}{2} \frac{dV_c^2}{dt}$
- no es estrictamente (state) pasivo porque $\min_i Ri^2 = 0$.
- Es estrictamente input pasivo porque disipa potencia Ri^2 .
- No es estrictamente output pasivo (con las entradas cambiadas de antes no era “input” pasivo).

Como no es estado/output pasivo, no se puede usar pasividad para probar estabilidad (el condensador no se descarga con $i = 0$):

- en efecto, la impedancia $V(s) = (R + \frac{1}{Cs}) \cdot i(s)$ **no** es asintóticamente estable (es *marginally* inestable).



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Circuito RC, con entrada V , salida V_c

(filtro 1er orden)

- Si consideramos entrada V , salida V_c , modelo $V_c(s) = \frac{1}{RCs+1} V(s)$, con función de energía $E = \frac{RC}{2} V_c^2$ entonces $\frac{dE}{dt} = RCV_c \frac{dV_c}{dt} = RV_c i$.

$$V \cdot V_c = \underbrace{RV_c \frac{(V - V_c)}{R}}_{\frac{dE}{dt}} + \underbrace{V_c^2}_{\text{Disipación}}$$

es estrictamente pasivo (salida, estado, que es lo mismo) $\Rightarrow$ estable.

*En este caso, la conexión (absorbiendo potencia) de un “cable” al condensador no garantiza la pasividad del circuito resultante: las conexiones “físicas” de potencia comparten tensión e intensidad... sólo un “regulador” que leyera V_c absorbiendo potencia despreciable y actuara sobre V podría ser utilizado para aprovechar la pasividad de la ecuación de arriba.

*En las otras configuraciones, la pasividad se hubiese mantenido incluso con una resistencia no-lineal estrictamente pasiva (p.ej., con $i = \epsilon \cdot (V - V_c) + f(V - V_c)$ con f en primer/tercer cuadrante con entrada V salida i). No así con esta selección de entradas y salidas, donde la disipación V_c^2 no tiene mucho sentido “físico” y ha sido obtenida manipulando ecuaciones con resistencia lineal.

Conclusiones

- La “disipación de energía” puede usarse para probar estabilidad y manejar la interconexión de sistemas
 - Inspirado en la física: resistencias, rozamiento, viscosidad, etc. disipan **energía**.
- El modelado debe aislar una entrada y una salida tales que $u^T y \geq V'(x)$ (repr. interna).
 - Existen variaciones de la definición con exceso de pasividad input/output/estado (pasividad *estricta*).
- La propiedad de pasividad depende de la elección de entradas y salidas.
- Los sistemas estrictamente pasivos (estado o output+observabilidad) son estables.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA