Pasividad: teoremas de pasividad/estabilidad

Antonio Sala Piqueras

Control de sistemas complejos

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)

Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**pas1**.html

Presentación

Motivación:

La disipación neta de energía parece "sinónimo" de estabilidad. La interconexión de sistemas físicos que disipan energía no debería ser inestable. En muchos modelos físicos, se puede asegurar que ciertos elementos aunque sean inciertos son "pasivos" (resistencia, fricción).

Objetivos:

Comprender las relaciones entre pasividad y estabilidad; comprender que la conservación de la energía en sistemas interconectados permite probar la estabilidad de dicha interconexión.

Contenidos:

Revisión de conceptos. Estabilidad e interconexión de sistemas pasivos. Conclusiones.

Pasividad

- [Integral Quadratic Constraint] Sea un sistema $y = \Delta u$ tal que $0 = \Delta \cdot 0$, cuadrado (n. entradas=n. salidas) y supongamos condiciones iniciales nulas. Δ es pasivo si se cumple $\int_0^T u^T y\, dt \geq 0$ para toda entrada u e intervalo de tiempo T. Δ es **estrictamente** pasivo si tiene ganancia finita (estable BIBO) y: $\int_0^T u^T y\, dt \geq \epsilon \int_0^T u^T u\, dt$ (input passive), o $\int_0^T u^T y\, dt \geq \epsilon \int_0^T y^T y\, dt$ (output passive) $\epsilon > 0$

- [Storage Function] Incorporando estado y condiciones iniciales no nulas (función de almacenamiento, "energía", $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ para $x \neq 0$, $\lim_{x\to\infty} V(x) = +\infty$): pasivo si $u(t)^T y(t) \geq \frac{d}{dt} V(x(t))$. Entonces, $\int_0^T u^T y \geq V(x(T)) - V(0)$; con c.i. nulas $\int_0^T u^T y \geq V(x(T)) \geq 0$.

Estrictamente pasivo si $\underbrace{u(t)^T y(t)}_{\text{Potencia ext.}} \geq \frac{d}{dt} \underbrace{V(x(t))}_{\text{Energía almacenada}} + \underbrace{\phi(x)}_{\text{Disipación}}$; $\phi(x) \geq 0$.

Estabilidad

Los sistemas estrictamente pasivos son estables:
Si $u^T y \geq \frac{d}{dt}V(x) + \phi(x)$, con $u = 0$ entonces la energía almacenada decrece $\frac{dV(x)}{dt} \leq -\phi(x) \leq 0$.

Quizás dejará de decrecer en algún punto donde $\phi(x)$ sea cero (no se disipe)...

Principio de La Salle: el estado del sistema convergerá a un **conjunto invariante** (punto de equilibrio, ciclo límite, ...) contenido en $\{x : \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0\}$.
En términos físicos, convergerá a un conjunto de “estados de mínima energía”.

*Se debe cumplir $V(x)$ diferenciable, $V(x) \to +\infty$ si $x \to \infty$, y algunas otras condiciones técnicas.

Si, $\phi(x)$ es tal que $\phi(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, alcanzará el equilibrio $x = 0$.

En control no-lineal, estas funciones $V(x)$ se denominan Función de Lyapunov.

Ejemplos

Ejemplo 1: Masa-muelle-amortiguador, $V(x)$ = energía mecánica total (pot. gravitatoria+cinética+pot. muelle), $\phi(x)$ disipación por rozamiento siempre... V(x) decrecerá hasta que el estado tenga velocidad cero $\phi(x) = Fv = 0$ y una posición de equilibrio...

Ejemplo 2: En un circuito eléctrico pasivo sin entradas, $V(x) = \sum_j \frac{C_j V_j^2}{2} + \sum_k \frac{L_k i_k^2}{2}$, el estado del sistema evolucionará hasta un punto donde no circule intensidad por las resistencias.

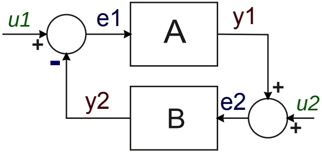
Este concepto de estabilidad basada en "energía" no necesita linealidad, polos, Laplace, etc.: es más general. El rozamiento puede ser no lineal (Coulomb... bueno, ojo con el "pegado" –stiction– que puede hacer que el conjunto invariante no sea únicamente $x = 0$), el circuito puede contener diodos (idem, podría quedar cargado si la polaridad del diodo impide la descarga), etc. En general, los sistemas electromecánicos alcanzarán $x = 0$ con nonlinealidades "suaves", diferenciables.

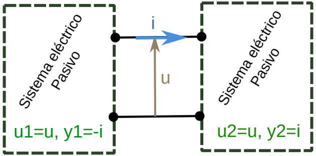
Sistemas interconectados (tma. pasividad)

La interconexión realim. negativa de sistemas pasivos es pasiva $\rightarrow$

estable si ambos estrict. pasivo (o ciertas cond. más relajadas):

Equiv.: conexión física



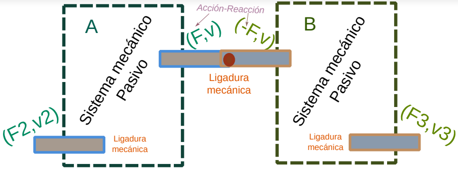


$$u^T y = u_1{}^T y_1 + u_2{}^T y_2 = (e_1 + y_2) y_1^T + (e_2 - y_1)^T y_2 = e_1^T y_1 + e_2^T y_2$$

Si $e_1^T y_1 \geq V_A(x_A) + \phi_A(x_A)$, $e_2^T y_2 \geq V_B(x_B) + \phi_B(x_B)$, entonces

$$u^T y = e_1^T y_1 + e_2^T y_2 \geq \frac{d}{dt}\left(\underbrace{V_A(x_A) + V_B(x_B)}_{\text{Almacenamiento}}\right) + \underbrace{\phi_A(x_A) + \phi_B(x_B)}_{\text{Disipación}}$$

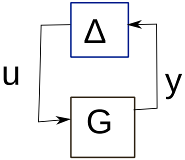
Otras Interconexiones



$$F_2 \cdot v_2 + F \cdot v \geq \frac{d}{dt} V_A(x_A), \qquad F_3 \cdot v_3 - F \cdot v \geq \frac{d}{dt} V_B(x_B) \qquad \Rightarrow$$

$$F_2 \cdot v_2 + F_3 \cdot v_3 \geq \frac{d}{dt}\left(V_A(x_B) + V_B(x_A)\right)$$

Interconexión realim. positiva de estrict. pasivo y estrict. negado-pasivo es estable:



$$\Delta \text{ pasivo}: \qquad u^T y \geq \frac{d}{dt} V_\Delta(x_\Delta) + \phi_\Delta(x_\Delta)$$

$$-G \text{ pasivo}: \qquad -u^T y \geq \frac{d}{dt} V_G(x_G) + \phi_G(x_G)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(V_G(x) + V_\Delta(x_\Delta)\right) \leq -\phi_G(x_G) - \phi_\Delta(x_\Delta) \leq 0$$

Conclusiones

- La "disipación de energía" puede usarse para probar estabilidad.
  - Inspirado en la física: resistencias, rozamiento, viscosidad, etc. disipan energía.
- Los sistemas estrictamente pasivos realizables son estables, y su interconexión con realimentación negativa también lo es.
  - La "conexión" de circuitos eléctricos pasivos, de sistemas mecánicos, térmicos puede asimilarse a "realim. negativa" como consecuencia de leyes de Kirchoff, acción-reacción, transm. calor,...
- Muchos sistemas físicos son inciertos pero se sabe, seguro, que son "pasivos" y puede aprovecharse en análisis y diseño de control.
  - En control robusto lineal se suele utilizar una interconexión G–Δ (denominada LFT) con realim. positiva... También sirve pasividad, es cuestión de cambiar un signo.
  - Tma. pasividad es una herramienta alternativa/complementaria al tma. pequeña ganancia en control robusto (existen transformaciones pasivo↔contractivo que los hacen "casi" equivalentes.).