

Régimen estacionario ante entradas deterministas (representación interna)

Antonio Sala Piqueras

Universitat Politècnica de Valencia

Control de Sistemas Complejos

Presentación en vídeo en:
<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ress.html>

Motivación

- La “calidad” de la respuesta de muchos sistemas es **evaluada** según las características de su respuesta ante entradas de tipo **escalón, rampa o senoidal**. Esa respuesta tiene un componente “transitorio” (exponencial) y otro “estacionario”.
- Ante dichas entradas, un sistema lineal presenta una respuesta **transitoria** (dependiente de condiciones iniciales, que tiende a cero si es estable) + un “**régimen estacionario**” con una forma *similar* a la de la entrada que lo excita.
- El **cálculo** del régimen estacionario (**solución particular**) es, en algunos casos, **sencillo**. Generalizaremos los conceptos de ganancia, respuesta rampa y respuesta en frecuencia, al caso de modelos en representación interna.

Generadores lineales de señales

Entradas $u(t)$ deterministas generadas linealmente: Aquéllas que verifican una ecuación de estado $\dot{\xi} = M\xi$, y de salida $u = N\xi$.

- **Constante:** $u = \alpha$ puede generarse con

$$\dot{\xi} = 0\xi, \quad u = 1\xi,$$

con condición inicial $\xi(0) = \alpha$. En efecto $\xi(t) = \alpha$.

- **Rampa:** $u(t) = \alpha + \beta t$ es generada por:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xi, \quad u = (1 \ 0)\xi$$

con condición inicial $\xi(0) = (\alpha, \beta)^T$. En efecto $\xi(t) = (\alpha + \beta t, \beta)^T$.

Generadores lineales de señales (2)

- **Senoidal:** $u(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ es generada por:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \xi, \quad u = (1 \ 0) \xi$$

con condición inicial $\xi(0) = (\alpha, -\beta)^T$. En efecto $s\xi(s) - \xi(0) = M\xi(s)$ resulta en $(sI - M)\xi(s) = \xi(0)$, $\xi(s) = (sI - M)^{-1}\xi(0)$, esto es:

$$\xi(s) = \begin{pmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{pmatrix}^{-1} \cdot \xi(0) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha s + \beta \omega}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{\omega \alpha - \beta s}{s^2 + \omega^2} \end{pmatrix}$$

cuya transformada inversa resulta en

$$\xi(t) = (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t), -\beta \cos(\omega t) + \alpha \sin(\omega t))^T.$$

* Con $\xi(0) = (1, 0)$, tenemos $\xi(t) = (\cos(\omega t), \sin(\omega t))^T$.

Cálculo régimen estacionario (ec. estado)

Sea sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, con $\dot{\xi} = M\xi$, $u = N\xi$.

Supongamos que existe una solución particular $x(t) = Q\xi(t)$. Entonces, $\dot{x}$ debería ser $Q\dot{\xi} = QM\xi$, y se debería verificar $QM\xi = A Q\xi + B N\xi$, esto es:

$$-AQ + QM = BN$$

Esta ecuación es una ecuación de Sylvester [https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester_equation]. Tiene solución si $-A$ y M no tienen autovalores coincidentes. Realmente, es un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes de la matriz Q .

Se resuelve con $Q = \text{sylvester}(-A, M, B * N)$ en Matlab. Escogiendo distintas opciones de M y N se obtiene, por tanto, el régimen estacionario ante constante (equilibrio), rampa o senoide (respuesta en frecuencia).

*Equilibrio constante: $M = 0$, $N = 1$.

La ecuación de Sylvester se reduce a $0 = AQ + B$, $-AQ = B$, esto es $Q = -A^{-1}B$.

