Inversa de sistemas en representación interna

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en: http://personales.upv.es/asala/YT/V/**invss**.html

Introducción

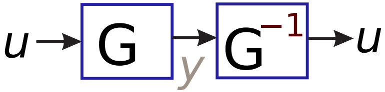
Motivación:
En un diagrama de bloques pueden aparecer inversas de modelos en representación interna.

Objetivos:
Comprender cómo calcular la representación interna de la inversa de un sistema, y cuándo la inversa de un sistema es realizable.

Contenidos:
inversa en representación interna, polos y ceros del sistema inverso.

Inversa

Supongamos que tenemos un sistema
$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du.$



Entonces, si D es invertible podemos escribir:

$$u = D^{-1}(y - Cx)$$

con lo que queda la ecuación de estado con entrada y:

$$\dot{x} = Ax + B(-D^{-1}Cx + D^{-1}y) = \underbrace{(A - BD^{-1}C)}_{A_{inv}} \cdot x + \underbrace{BD^{-1}}_{B_{inv}} \cdot y$$

y de salida u:

$$u = \underbrace{-D^{-1}C}_{C_{inv}} \cdot x + \underbrace{D^{-1}}_{D_{inv}} \cdot y$$

Nota: si D no es invertible, entonces la inversa no es *realizable*. Ejemplo, la inversa de $1/(s+1)$ es $(s+1)$, y no puede ser expresada con una repr. en variables de estado normalizada.

Polos y ceros

De transp. anterior, la inversa de $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BD^{-1}C)x + BD^{-1}y \\ u &= -D^{-1}Cx + D^{-1}y\end{aligned}$$

Los **ceros** de transmisión de ss(A,B,C,D) son las raíces de:

$$det\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = 0$$

Pero, según el lema de Schur (determinante de matriz particionada) https://en.wikipedia.org/wiki/Schur_complement se tiene que: $det\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = det(D)det(A - \lambda I - BD^{-1}C) = (-1)^n det(D)det(\lambda I - (A - BD^{-1}C))$

$\Longrightarrow$ Los ceros de un sistema G son los polos de su inversa G^{-1}.

Ceros y polos (II)

Los ceros del sistema inverso G^{-1} son las raíces de:

$$\Xi := det\left(\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C - \lambda I & BD^{-1} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}\right) = 0$$

aplicando el lema de Schur de nuevo, ese determinante es:

$$\Xi = det(D^{-1}) \cdot det\left((A - BD^{-1}C - \lambda I) - (BD^{-1})D(-D^{-1}C)\right)$$
$$= det(D^{-1}) \cdot det\left((A - BD^{-1}C - \lambda I) + BD^{-1}C\right) = det(A - \lambda I)det(D^{-1})$$

$\Longrightarrow$ Los polos de un sistema G son los ceros de su inversa G^{-1}.

Conclusiones

- La inversa de un sistema (con D invertible) tiene una representación en variables de estado que se obtiene a partir de las matrices de la representación del sistema original.
- En la mayor parte de casos, resulta computacionalmente más sencilla que la inversión de matrices de transferencia (simbólicas) en un caso multivariable.
- Los polos y ceros en la inversa se intercambian respecto al sistema original.