Descomposición en valores singulares (SVD) Introducción

Antonio Sala

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)
Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/svd0A.html

Introducción

Motivación:

- Expresar la acción de una matriz de forma "simple" (escalado–ganancia, rotación–cambio de coordenadas)

Objetivo:

- Calcular la descomposición, interpretarla, y comprender sus consecuencias.

Contenido:

- Teorema de descomposición, cálculo mediante diagonalización, interpretación geométrica, rango de matrices experimentales, inversa y pseudoinversa.

SVD completo (full SVD)

Teorema

Toda Matriz $A_{n\times m}$ puede expresarse como

$$A = U_{n\times n} \cdot S_{n\times m} \cdot V^T_{m\times m}$$

- $U_{n\times r}$, $V_{m\times r}$ son matrices ortogonales, esto es $U^T U = I_{n\times n}$, $V^T V = I_{m\times m}$.
- S es **diagonal** con r elementos positivos en la diagonal, siendo r el rango de la matriz, y el resto cero.

Los elementos de la diagonal de S se denominan **valores singulares** de A. Las columnas de U y V se denominan **direcciones principales de salida** y de **entrada**, respectivamente.

Demostración: personales.upv.es/asala/videos/svd1.html

Cálculo

$$AA^T = (USV^T)(VS^TU^T) = USS^TU^T.$$

- U es la matriz (ortogonal) de autovectores de la matriz simétrica AA^T, y la diag. de S contiene la raíz cuadrada de sus autovalores.

$$A^TA = (VS^TU^T)(USV^T) = VS^TSV^T.$$

- V es la matriz (ortogonal) de autovectores de la matriz simétrica A^TA, y S contiene la raíz cuadrada de sus autovalores.

Matlab: `[U,S,V]=svd(A)`

*`[U,S,V]=svd(A,'econ')` devuelve la descomposición "económica" donde los elementos de diag(S) nulos son eliminados, así como las columnas de U y V que iban multiplicadas por ellos. Si A tiene rango r, la descomposición es $A = U_{n\times r} \cdot S_{r\times r} \cdot V^T_{r\times m}$.

Interpretación Geométrica

Si x es paralelo a la columna "i" de V, siendo $\sigma_i := s_{ii}$ (diag. de S ordenada de mayor a menor),

$$V^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \underbrace{\|x\|}_{\text{pos. } i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad SV^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_i \|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

la salida $y = Ax = USV^T x$ tiene la dirección del vector en la columna i de la matriz U, y el tamaño $\sigma_i \|x\|$.

El efecto ante un x arbitrario es la superposición de ese redireccionamiento y escalado, a cada componente en la base V de direcciones de entrada.

La mayor "amplificación" se dará con x en la dirección de la primera columna de V y la ganancia máxima será σ_1.

Rango de una matriz

El rango de una matriz es el número de valores singulares no nulos.

Rango "**práctico**": número de valores singulares comparativamente "grandes" (en matrices "experimentales" cuyos datos son "poco precisos").

$$A_{clean} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & 1.99 & 3.01 \\ 4 & 4.99 & 6.01 \\ 6.99 & 8 & 9.01 \end{pmatrix}$$

A_{clean} tiene rango 2, porque (fila 1)-2 *(fila 2)+(fila 3)=0. Medidas experimentales $\hat{A}$ resultan en Matlab:

```
rank(Agorro)
 ans = 3
svd(Agorro)
 ans = 16.85, 1.06, 0.005
```

*Una dirección (σ_3) tiene ganancia 200 veces más pequeña que la siguiente... posiblemente sea realmente "cero" y el 0.005 sea por "ruido experimental".

Inversa y Pseudoinversa

La **inversa** se obtiene con el SVD invirtiendo S. Sea A cuadrada $n \times n$, de rango n:

$$A = USV^T \qquad A^{-1} = VS^{-1}U^T$$

- En efecto, $(USV^T) \cdot (VS^{-1}U^T) = I$.

La **pseudoinversa** (problemas de mínimos cuadrados) $A^\dagger$ se obtiene a partir del SVD invirtiendo sólo los r valores singulares **no nulos**:

$$A_{n\times m} = U_{n\times n} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times m} \cdot V^T_{m\times m}$$

$$A^\dagger{}_{m\times n} = V_{m\times m} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_{r\times r}{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot U^T_{n\times n}$$

Se tiene: $AA^\dagger = U \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} U^T \underbrace{= I_{n\times n}}_{\text{si } r=n}$, $\quad A^\dagger A = V \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m} V^T \underbrace{= I_{m\times m}}_{\text{si } r=m}$

Conclusiones

- Descomposición en producto de matrices ortogonales (direcciones principales de salida y entrada, rotaciones) y diagonales (escalado).
- Se calcula resolviendo problemas de autovalores y autovectores (eficiente).
- Concepto de ganancia máxima.
- Determinación de rango "práctico" en matrices con ruido, relación con fórmulas de inversas y pseudoinversas.
- Los resultados son muy usados en estadística, informática e ingeniería.