

Descomposición en valores singulares (SVD)

Demostración

Antonio Sala

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)
Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/videos/svd1.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación:

- Expresar la acción de una matriz de forma “simple” (escalado–ganancia, rotación–cambio de coordenadas), múltiples aplicaciones en control, estadística, informática...

Objetivo:

- Conocer la descomposición y entender cómo calcularla.

Contenido:

- Teorema de descomposición (matrices reales), demostración.

Conceptos preliminares

- Norma de un vector $\sqrt{(\psi^T \psi)} \geq 0$. $\|\psi\| = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$.
- Matriz ortogonal V , $V^T V = I$. Cambio de base ortogonal $\Leftrightarrow$ giro.
- Diagonalización matriz simétrica M ($M = M^T$): existe V , D con $V^T V = I$ (V es matriz ortogonal) y D diagonal tales que:

$$M = V D V^T \quad V^T M V = D$$

- Matriz simétrica semidefinida positiva $\psi^T S \psi \geq 0$ para todo ψ . En la diagonalización, $\text{diag}(D)$ tiene elementos positivos o/y nulos.

Descomposición en valores singulares (SVD)

Teorema

Toda Matriz $A_{n \times m}$ de rango r puede expresarse como

$$A = U_{n \times r} \cdot S_{r \times r} \cdot V_{r \times m}^T$$

- $U_{n \times r}$, $V_{m \times r}$ son matrices con columnas **ortonormales**, esto es $U^T U = I_{r \times r}$, $V^T V = I_{r \times r}$, por lo que $\text{pinv}(V) = V^T$, $\text{pinv}(U) = U^T$.

*Si $r = n$ (o $r = m$) entonces U (o V) son matrices **cuadradas** ortogonales $U^{-1} = U^T$ (o $V^{-1} = V^T$, respectivamente).

- S es **diagonal** con elementos positivos en la diagonal.

Esta descomposición se llama **SVD económico**. (Singular Value Decomposition)



Demostración (1)

Considérese $M = A^T A$. M es $m \times m$, positiva semi-definida dado que:

$$x^T M x = x^T A^T A x = (Ax)^T \cdot (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$

Podemos diagonalizar M con vectores propios **ortogonales**: existe una matrix ortogonal $\bar{V}$ tal que $\bar{V}^T M \bar{V} = \bar{D}$. Como $\bar{D} \geq 0$, dividámosla en:

$$\bar{D}_{m \times m} = \begin{bmatrix} D_{r \times r} & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix}$$

y, llamemos $S_{r \times r} := \sqrt{D} > 0$. Del mismo modo, descompongamos

$$\bar{V}_{m \times m} = [V_{m \times r} \quad V_2_{m \times (m-r)}]$$

y llamemos V a los r vectores propios asociados a autovalores **no nulos**, y V_2 al resto ($m - r$ autovalores **nulos**).

Demostración (2)

Como $\bar{V}$ es ortogonal, se tiene

$$\bar{V} \cdot \bar{V}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} V & V_2 \end{bmatrix}}_{\bar{V}} \cdot \begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = I_{m \times m}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} A^T A \begin{bmatrix} V & V_2 \end{bmatrix}}^{\bar{V}^T \cdot M \cdot \bar{V}} = \bar{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} S \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} V^T A^T A V & V^T A^T A V_2 \\ V_2^T A^T A V & V_2^T A^T A V_2 \end{bmatrix}}_{\bar{D}}$$

Multiplicando las matrices entre llaves por $\text{diag}(S^{-1}, 0)$ (izqda y dcha):

$$\begin{bmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{S^{-1} V^T A^T}^{U^T} \cdot \overbrace{A V S^{-1}}^U & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denominando $U_{n \times r} = A V S^{-1}$, se verifica $U^T U = I$ (ortogonal).



UNIVERSITAT
POLITÉCNICA
DE VALÈNCIA

Demostración (3)

A partir de $U_{n \times r} = AVS^{-1}$, tenemos $U \cdot S = A \cdot V$.

* V no es cuadrada, no podemos multiplicar por V^{-1} (no existe).

Como $A \cdot V_2 = 0$, podemos añadir $(m - r)$ columnas y escribir:

$$\underbrace{U \cdot [S \ 0_{n \times (m-r)}]}_{[(US)_{n \times r} \ 0]_{n \times m}} = \underbrace{A \cdot [V \ V_2]}_{[(AV)_{n \times r} \ 0]_{n \times m}} = A\bar{V}$$

$$\bar{V} \text{ es invertible, ortogonal} \Rightarrow \boxed{A} = U[S \ 0]\bar{V}^T = U[S \ 0] \begin{bmatrix} V^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = \boxed{USV^T}$$



SVD completo (full SVD)

Teorema

Toda Matriz $A_{n \times m}$ puede expresarse como

$$A = U_{n \times n} \cdot S_{n \times m} \cdot V_{m \times m}^T$$

A esta descomposición se le denomina **SVD completo**.

- Del final de la demostración, $A = U \cdot [S \ 0] \cdot \bar{V}^T = [U \ U_2] \cdot \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \bar{V}^T$ con U_2 arbitrario (bueno, 'casi' arbitrario: hay que completar U hasta hacer la matriz $[U \ U_2]$ ortogonal).



Conclusiones

- Descomposición de una matriz en:
 - giro ortogonal V^T
 - escalado S (rango r : r escalados distintos de cero, resto nulos), S diagonal
 - giro ortogonal U .
- Demostración basada en la diagonalización de una matriz simétrica.
- Cálculo en computador también mediante autovalores/autovectores.
- Interesantes propiedades y usos en aplicaciones de ingeniería/computación.