Selección de actuadores y variables a controlar

Antonio Sala

DISA-UPV

Video-presentación de los distintos apartados disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/saplant.html, (planteamiento) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sap1.html, (perturb., total, poliedros) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sap2.html, (perturb., parcial, poliedros) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sap3.html, (conclusiones poliedros) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sa3ref.html, (ref. ganancia, SVD) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sa3refex.html, (ref. ganancia, SVD, ejemplo) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sa3pc.html, ((perturb., SVD, condicionamiento)) http://personales.upv.es/asala/YT/V/satrans.html, (SVD, transitorio) http://personales.upv.es/asala/YT/V/satransP.html, (SVD, parcial perturb. transitorio) http://personales.upv.es/asala/YT/V/sa4conc.html (conclusiones finales)

Colección completa de materiales docentes en http://personales.upv.es/asala/YT

Motivación, Preliminares

Ingeniería de sistemas: proyectar sistemas fáciles de controlar.

- Seleccionar punto de operación
- Análisis teórico/experimental/prototipo de las propiedades del sistema (estáticas y dinámicas) en ese punto.
- Si no son satisfactorias, dos alternativas:
  1. Rediseñar el proceso o/y cambiar el punto de operación.
  2. Instalar instrumentación de control.

*Si se decide **control**:

- Decidir actuadores
  1. manuales (fijados en la **instalación**, revisados en mantenimiento periódico/calibración).
  2. automáticos (más **caros**: potencia, comunicaciones, controladores)
- Decidir qué variables deben **controlarse** (tener **referencias**) o/y **medirse** (instalar **sensores**).
- Diseñar reguladores.

Motivación, Preliminares

Ingeniería de sistemas: proyectar sistemas fáciles de controlar.

- Seleccionar punto de operación
- Análisis teórico/experimental/prototipo de las propiedades del sistema (estáticas y dinámicas) en ese punto.
- Si no son satisfactorias, dos alternativas:
  1. Rediseñar el proceso o/y cambiar el punto de operación.
  2. Instalar instrumentación de control.

*Si se decide **control**:

- Decidir actuadores
  1. manuales (fijados en la **instalación**, revisados en mantenimiento periódico/calibración).
  2. automáticos (más **caros**: potencia, comunicaciones, controladores)
- Decidir qué variables deben **controlarse** (tener **referencias**) o/y **medirse** (instalar **sensores**).
- Diseñar reguladores.

Motivación, Preliminares (2)

En un problema de control multivariable existen 3 grupos de "salidas":

- [1] Variables **controladas primarias**: Factores fundamentales de la demanda/calidad/rentabilidad del proceso.
- Otras variables:
  - [2] Variables **controladas secundarias**: se decide controlarlas, por su relación con las primarias para "ayudar" a dichos objetivos (ej. control en cascada), porque se dispone de actuadores adecuados para ellas.
  - [3] Salidas **no controladas**: Puede decidirse medirlas [3.1] para monitorización/detección de fallos ; [3.2] otras variables (no-controladas, no-medidas) no se considera que aporten información relevante.

Planteamiento del problema

La selección de **referencias** (1as, 2as) y los **actuadores** necesarios para controlarlas tiene una gran influencia en el **coste** y **prestaciones** del control de la instalación resultante.

Factores fundamentales:

- Saturación de los actuadores.
  - Se suele diseñar para que la planta esté casi al límite de caudales/potencias, etc. con lo que algunos actuadores podrían tener poco incremento disponible hasta saturar.
- Ancho de banda (rapidez) limitado de actuadores.
- Ancho de banda del proceso (difícil seguir referencias que cambian rápidamente aun con actuadores ideales; difícil compensar perturbaciones cuyo efecto sobre la salida es más rápido que el de los actuadores)
- Algunas variables de salida son afectadas por perturbaciones grandes, otras no.
- Consideraciones económicas (precio de actuadores vs. pérdidas causadas por desviaciones respecto a objetivo)

Planteamiento del problema (2)

Solución en 2 etapas:

1. **Régimen permanente:**
   - Confirmar que en equilibrio se pueden alcanzar las referencias deseadas sin saturar actuadores.
   - Confirmar que se pueden compensar las perturbaciones esperables (si son lentas).
2. **Régimen transitorio** (caso general)**:**
   - Confirmar que se pueden alcanzar las referencias deseadas sin saturar actuadores **con suficiente rapidez.**
   - Confirmar que se pueden compensar las perturbaciones esperables, **conocido su ancho de banda**.

Preliminares: Poliedros

Un **poliedro** es un conjunto delimitado por un número s de hiperplanos. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{B} := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{array}{r} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \leq \lambda_1 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \leq \lambda_2 \\ \vdots \\ r_{s1}x_1 + r_{s2}x_2 + r_{s3}x_3 \leq \lambda_s \end{array} \right\}$$

▶ **Representación por caras:** en general $\mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n : Rx \leq \lambda\}$, siendo R una matriz $s \times n$ y λ un vector columna $s \times 1$.

▶ Alternativamente, puede ser definido a partir de sus **vértices** $\mathbb{B} := Co(\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q\})$, siendo $Co(\cdot)$ la "envoltura convexa".

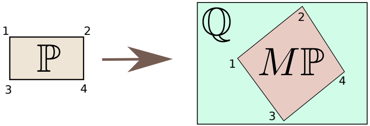
Paso de caras a vértices. Formar todas las $s!/n!(s-n)!$ combinaciones de n ecuaciones sustituyendo $\leq$ por $=$, y resolverlas. Si cada solución verifica todas las s ecuaciones, entonces es un vértice del poliedro.

- Poliedro **vacío:** si el procedimiento caras$\Rightarrow$ vértices no encuentra ninguno.
- **Programación lineal:** optimizar funciones lineales en poliedro. Problema **no factible** $\Leftrightarrow$ poliedro vacío.

Transformaciones de poliedros

Una transformación **lineal** $r = Mx$ (también afín $r = Mx + n$) **transforma** rectas en rectas, planos en planos... **poliedros en poliedros**:

$$\mathbb{P} := \{x : Rx \leq \lambda\} \quad \Rightarrow \quad (M\mathbb{P}) = \bigcup_{x \in \mathbb{P}} Mx$$



El poliedro $M\mathbb{P}$ está dentro de otro poliedro $\mathbb{Q}$ *sí y sólo sí* para todo $\nu \in vert(\mathbb{P})$, $M\nu \in \mathbb{Q}$.

Seguimiento de Referencias (rég. perm)

Supongamos que se tiene ganancia linealizada $y = Gu$, $y \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$. Se desea comprobar si todas las combinaciones "extremas" de salidas deseadas pueden conseguirse sin saturar los actuadores: la ganancia debe ser "suficientemente grande".

Suponemos que queremos $y \in \mathbb{B}_q$, siendo $\mathbb{B}_q$ el hipercubo cuyos vértices ν_i, $i = 1, \ldots 2^q$, son todas las combinaciones de límites inferior/superior de cada variable y.

Si $\bar{u}_i = inv(G)\nu_i$ es admisible (no satura actuador), para todo $i = 1, \ldots 2^q$, entonces se puede controlar sin saturar, con error nulo. $[m = q]$

Demostración: transformación lineal de poliedros, $G^{-1}\mathbb{B}_q$ no satura si para todo $y \in Co(\nu_1, \ldots, \nu_{2^q})$, $u \in Co(pinv(G_{esc})\nu_1, \ldots, pinv(G_{esc})\nu_{2^q})$.
*Los poliedros no tienen por qué ser simétricos.

Ejemplo

Sistema 2 entradas y 2 salidas linealizado alrededor del punto $y_e = (6, -4)$, $u_e = (5, 1.5)$, ganancia estática: $G = [6\ 4; -2\ \ -3]$. Los actuadores tienen límites de saturación: $0 \leq u_1 \leq 8$, $0 \leq u_2 \leq 2$. Comprobar (aproximadamente, basándose en el modelo linealizado) si los actuadores pueden mover las salidas a cualquier punto del rango $\mathbb{B}_q = \{3 \leq y_1 \leq 8,\ -6 \leq y_2 \leq -3\}$.

Solución:

[1] Pasamos a coord. incrementales, $-5 \leq \Delta u_1 \leq 3$, $-1.5 \leq \Delta u_2 \leq 0.5$, $-3 \leq \Delta y_{e,1} \leq 2$, $-2 \leq \Delta y_{e,2} \leq 1$.

[2] Enumeramos vértices de salida: $\{(-3,-2),(-3,1),(2,-2),(2,1)\}$

[3] Comprobamos G^{-1} por cada vértice:

$$G^{-1}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1.7\\1.8\end{pmatrix},\quad G^{-1}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.5\\0\end{pmatrix},\quad G^{-1}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.2\\0.8\end{pmatrix},\quad G^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

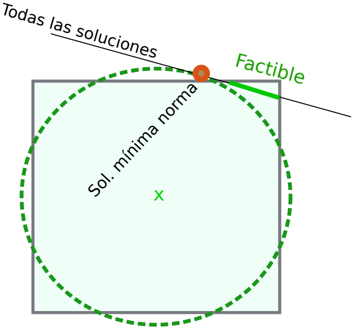
*Dos números se salen de rango de Δu, no se puede hacer las maniobras deseadas.

Escalado: En situación simétrica alrededor del pto. func. y con variables adecuadamente escaladas, los vértices de Δu, Δy admisibles son las combinaciones con coordenadas ± 1.

Factibilidad con exceso de actuadores

¿Sustituir inversa con pseudoinversa (escalada)? Si $\bar{u} = pinv(G_{esc})\nu_i$ no satura, se puede controlar. Razonable y rápido... pero conservativo:

- $\nu_i = Gu$ tiene **infinitas soluciones**: la solución de menor norma no está en un poliedro, pero puede existir otra de mayor radio que sí lo esté.



- Región válida de accs. control:

$$\mathbb{B}^{[u]} := \{u : Ru \leq \lambda\}$$

- Probar que poliedro $\{u : \nu_i = Gu, Ru \leq \lambda\}$ no es vacío (para cada posible ν_i).

Por ejemplo, si `linprog(ones(1,m), R,` λ`, G,` ν_i`)` o `quadprog(eye(m),zeros(1,m), R,` λ`, G,` ν_i`)` no devuelven solución vacía/error.

*`quadprog` está relacionada con control predictivo en transitorio.

Cancelación TOTAL de perturbaciones (rég. perm)

Modelo: $y = Gu + Hd$.
Acción de control **prealimentación**: $0 = G\bar{u} + Hd$ con $\bar{u} = -pinv(G)Hd$, si G tiene rango q.

Teorema

Si $-pinv(G)H\nu_i$ es admisible para todo i, siendo ν_i cada vértice de un poliedro $\mathbb{B}^{[d]}$ donde se supone varían las perturbaciones, entonces se puede controlar sin saturar, con error nulo.*

*Con planta cuadrada (pinv→inv), exacto. No exacto con exceso de actuadores.

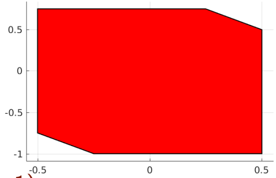
*Suponiendo perturbación medible o con la adecuada acción integral, con errores de modelado suficientemente pequeños, etc...

Ejemplo

Sea el sistema G de la transparencia [9], afectado por dos perturbaciones $d \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ (en coordenadas ya incrementales):

$$y = \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}^{G} u + \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0.5 \end{pmatrix}}^{H} d$$

donde d es tal que $-0.5 \le d_1 \le 0.5$, $-1 \le d_2 \le 0.75$, $-1.25 \le d_1 + d_2 \le 1$. ¿Qué rango de actuadores es necesario para cancelar las perturbaciones?



Solución:

[1] Vértices de $\mathbb{B}^{[d]}$:

(0.5, -1), (0.5, 0.5), (0.25, 0.75), (-0.5, 0.75), (-0.5, -0.75), (-0.25, -1).

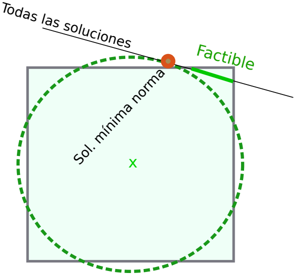
[2] $-G^{-1}H$ multiplicado por cada uno de los 6 vértices resulta en cada columna de Δu necesario:

0.9	-0.3	-0.55	-0.7	0.5	0.75
-1.1	-0.05	0.325	0.925	-0.125	-0.5

Por tanto, los incrementos de actuadores disponibles deberán incluir, como mínimo a los intervalos $-0.7 \le u_1 \le 0.9$ para el primer actuador, y para el segundo $-1.1 \le u_2 \le 0.925$.

Factibilidad (perturb.) con exceso de actuadores (II)

Como en el caso de seguir referencias, el análisis es aproximadamente correcto pero algo conservativo si hay exceso de actuadores: $-H\nu_i = Gu$ tiene infinitas soluciones.



Región válida de accs. control:

$$\mathbb{B}^{[u]} := \{u : Ru \leq \lambda\}$$

Comprobar si el poliedro

$$\{u : -H\nu_i = Gu, Ru \leq \lambda\}$$

no es vacío (para cada ν_i).

Por ejemplo, si `linprog(ones(1,m), R, λ, G, -H*ν_i)` no devuelve solución vacía/error. Versión `quadprog` también valdría.

Cancelación PARCIAL de perturbaciones (rég. perm.)

Supongamos modelo (linealizado, vbles incrementales): $y = Gu + Hd$.

- Las perturbaciones pertenencen a $\mathbb{B}^{[d]} := Co(\nu_1, \ldots)$.
- Las acciones de control deben pertenecer al poliedro $\mathbb{B}^{[u]} := \{u : R_u u \leq \lambda_u\}$, con matrices R_u, s_u, conocidas.
- Las salidas en bucle cerrado deben pertenecer a $\mathbb{B}^{[y]} := \{y : R_y y \leq \lambda_y\}$ (cotas de error)

Teorema

Si para cada vértice ν_i de $\mathbb{B}^{[d]}$, es factible el problema de **programación lineal** *de que exista $\bar{u}_i$ tal que ($\Leftrightarrow$ el poliedro en u siguiente no es vacío):*

$$R_u \bar{u}_i \leq \lambda_u, \qquad R_y(G\bar{u}_i + H\nu_i) \leq \lambda_y$$

entonces, se puede llevar la salida a los límites fijados.

*Al menos, con perturbación medible, sin errores de modelado, en todo el tiempo que haga falta. Dejando al lado izquierdo incógnitas, y al derecho factores conocidos, queda

$$\begin{pmatrix} R_u \\ R_y G \end{pmatrix} \bar{u}_i \leq \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_y - R_y H \nu_i \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Con el adecuado escalado, en una situación simétrica, ± 1 significa (a) límites de saturación de actuadores, (b) límites de error donde deben situarse las salidas, (c) límites de variación esperada de perturbaciones. Por tanto, $\mathbb{B}^{[d]}$ tiene de vértices las combinaciones con coordenadas ± 1, y los poliedros de entradas/salidas aceptables son:

$$\mathbb{B}^{[u]} = \left\{ \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathbb{B}^{[y]} = \left\{ \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo Matlab:

```
G=[1 4;2 4]; H=[3;-2];
Ey=diag([.6 .9]); Eu=diag([1.5 1]); Ed=0.5;
Gesc=inv(Ey)*G*Eu; Hesc=inv(Ey)*H*Ed;
Igorda=[eye(2);-eye(2)]; CuatroUnos=ones(4,1); verticed=1;
X=linprog(randn(2,1),[Igorda; Igorda*Gesc],[CuatroUnos;
CuatroUnos-Igorda*Hesc*verticed])
%se optimiza un índice al azar; si no da error ‘‘no factible’’, la cancelación parcial de
perturbaciones es posible.  No hace falta probar el otro vértice −1 por simetría.
```

Discusión

Se han presentado fórmulas para comprobar si se puede seguir cierta referencia (sin error), cancelar cierta perturbación (sin error) o cancelar parcialmente (error acotado) perturbaciones sin saturar actuadores.

Realmente, todo son casos particulares del último problema:

- Seguimiento de referencias: $e = Gu - 1r$
- Error nulo: $\lambda_y = 0$, $R_y = (I \quad -I)^T$.
- Caso combinado: $e = Gu + [-I \;\; H] \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$.

Incluso, se podría pretender diferentes errores en diferentes vértices de referencias/perturbaciones (R_{yi}, λ_{yi}).

Consideraciones prácticas

- Con plantas **cuadradas**, error 0, da igual analizar $inv(G)$ que poliedros.
- Con plantas **no cuadradas**, o canc. parcial:

▶ control **lineal** $u = K(s)y$ no hace "explícitamente" soluciones de programación lineal/cuadrática. Por tanto, para que no saturen actuadores, debería dimensionarse para que $u = pinv(G)[I \quad -H]\begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$ **no sature**.

▶ El **control predictivo** sí que resuelve problemas de programación cuadrática y consideraría de forma "natural" que alguna de las (infinitas) soluciones de $Gu = [I \quad -H]\begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$ no saturase.

*En la práctica, se dimensiona con un cierto "márgen de seguridad" y, además, para llevar las salidas a un p.f. "con una cierta rapidez" también hay que sobredimensionar, por lo que todas estas conclusiones son orientativas (falta analizar régimen transitorio).

Conclusiones enfoque basado en poliedros (régimen perm.)

- Manipulaciones de poliedros donde "debe" estar la entrada, donde "debe" estar la salida, cuando las perturbaciones "estén en cualquiera de los puntos" de un tercer poliedro.
- **No** necesita escalado a ± 1, si los poliedros están en unidades "absolutas"; con escalado, poliedros $\approx$ cubos de vértices ± 1

Problema 1: $u = Ky$ no obtiene la misma solución que linprog/quadprog, por tanto, el enfoque está más orientado al control **predictivo**.

Problema 2: No puede aplicarse al **transitorio**.

- $G(j\omega)$ es una matriz de números complejos y $a \leq b$ no tiene ningún significado si a y b son complejos (ordenación sólo vale en la recta real).
- Existe solución (aproximada) alternativa, basada en el SVD, a continuación...

Análisis de ganancia SVD (rég. perm.), 1

Comprobar si la ganancia $u \mapsto y$ es suficientemente grande para conseguir $r = Gu$ o $0 = Gu + Hd$ sin saturar.

[1] Seguimiento de referencias:

1. **Escalado** a rango ± 1 de entradas ($u = E_u u_{esc}$), salidas ($y = E_y y_{esc}$) y perturbaciones ($d = E_d d_{esc}$).
2. Comprobar si la **ganancia mínima** de G_{esc} es **mayor** de 1; entonces se puede conseguir $r_{esc} = G_{esc} u_{esc}$ para todo $\|r_{esc}\| \leq 1$ con $\|u_{esc}\| \leq 1$.

$$u_{esc} = G_{esc}^{-1} r_{esc} \;\rightarrow\; \|u_{esc}\| \leq \bar{\sigma}(G_{esc}^{-1})\|r_{esc}\| = \frac{\|r_{esc}\|}{\underline{\sigma}(G_{esc})} \leq \|r_{esc}\|$$

Si G_{esc} es $q \times m$ de rango q, la derivación de arriba vale para la pseudoinversa $G_{esc}^{\dagger}$: más actuadores que referencias no supone ningún problema (más bien al contrario, es ventajoso –pero más caro–).

Análisis de ganancia SVD (rég. perm.), 1

Comprobar si la ganancia $u \mapsto y$ es suficientemente grande para conseguir $r = Gu$ o $0 = Gu + Hd$ sin saturar.

[1] Seguimiento de referencias:

1. **Escalado** a rango ± 1 de entradas ($u = E_u u_{esc}$), salidas ($y = E_y y_{esc}$) y perturbaciones ($d = E_d d_{esc}$).
2. Comprobar si la **ganancia mínima** de G_{esc} es **mayor** de 1; entonces se puede conseguir $r_{esc} = G_{esc} u_{esc}$ para todo $\|r_{esc}\| \leq 1$ con $\|u_{esc}\| \leq 1$.

$$u_{esc} = G_{esc}^{-1} r_{esc} \;\rightarrow\; \|u_{esc}\| \leq \overline{\sigma}(G_{esc}^{-1})\|r_{esc}\| = \frac{\|r_{esc}\|}{\underline{\sigma}(G_{esc})} \leq \|r_{esc}\|$$

Si G_{esc} es $q \times m$ de rango q, la derivación de arriba vale para la pseudoinversa $G_{esc}^{\dagger}$: más actuadores que referencias no supone ningún problema (más bien al contrario, es ventajoso –pero más caro–).

Ejemplo

- Modelo del sistema (estático):

$$G = \begin{pmatrix} 20 & 140 & \frac{12}{25} & -\frac{2}{25} & 2 & 3 & 16 \\ 40 & 250 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & 5 & \frac{5}{2} & 15 \\ -\frac{6}{5} & -4 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & 0 \\ 2 & 20 & \frac{2}{25} & -\frac{1}{50} & -1 & \frac{1}{20} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

- Incrementos deseados de salidas:
  - 2, 5, 0.2, 1 unidades.
  - `E_y=diag([2 5 .2 1]);`
- Incrementos disponibles de entradas hasta saturación:
  - 1, 0.2, 25, 100, 2, 4, 1 unidades.
  - `E_u=diag([1 0.2 25 100 2 4 1]);`

Ejemplo (2)

- Modelo escalado: $G_{esc} = E_y^{-1} G E_u$

$$G_{esc} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 6 & -4 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 4 & -2 & 2 & 2 & 3 \\ -6 & -4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -2 & -2 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

- Ganancia mínima y condicionamiento:
  svd(Gesc)= 26.53, 4.68, 3.31, 1.60 ✓
- Con los 7 actuadores se pueden conseguir los incrementos deseados.
- De hecho, también pueden conseguirse con menos. Por ejemplo, con los actuadores 1, 3, 5 y 6, se tiene:
  svd(Gesc(:,[1 3 5 6]))= 17.14, 3.38, 2.57, 1.48 ✓

Análisis de ganancia SVD (rég. perm.), 2

Comprobar si la ganancia $u \mapsto y$ es suficientemente grande para conseguir $r = Gu$ o $0 = Gu + Hd$ sin saturar.

[2] Cancelación total de perturbaciones:

- Comprobar si **ganancia máxima** de $-pinv(G_{esc})H_{esc}$ es **menor** que 1:

$$0 = G_{esc}u_{esc} + H_{esc}d_{esc} \to u_{esc} = -G_{esc}^{\dagger}H_{esc}d_{esc}$$

$$\|u_{esc}\| \leq \overline{\sigma}(G_{esc}^{\dagger}H_{esc})\|d_{esc}\| \leq \|d_{esc}\|$$

[3] Robustez ante errores de modelado:

- Comprobar **condicionamiento** de G_{esc}
  - Recomendable $\overline{\sigma}(G)/\underline{\sigma}(G) \leq 5$; evitar por encima de 20

Análisis de ganancia SVD (rég. perm.), 2

Comprobar si la ganancia $u \mapsto y$ es suficientemente grande para conseguir $r = Gu$ o $0 = Gu + Hd$ sin saturar.

[2] Cancelación total de perturbaciones:

- Comprobar si **ganancia máxima** de $-pinv(G_{esc})H_{esc}$ es **menor** que 1:

$$0 = G_{esc}u_{esc} + H_{esc}d_{esc} \rightarrow u_{esc} = -G^{\dagger}_{esc}H_{esc}d_{esc}$$

$$\|u_{esc}\| \leq \overline{\sigma}(G^{\dagger}_{esc}H_{esc})\|d_{esc}\| \leq \|d_{esc}\|$$

[3] Robustez ante errores de modelado:

- Comprobar **condicionamiento** de G_{esc}
  - Recomendable $\overline{\sigma}(G)/\underline{\sigma}(G) \leq 5$; evitar por encima de 20

Ejemplo

```
G=[-1 4;2 4]; H=[2 0.4;-2 1];
Ey=diag([.6 .9]); Eu=diag([1.5 1]); Ed=diag([0.4 0.2]);
Gesc=inv(Ey)*G*Eu; Hesc=inv(Ey)*H*Ed;
Preal=-pinv(Gesc)*Hesc
Preal =
0.3556 -0.0267
-0.0667 -0.0300
svd(Preal)
ans = 0.3623 0.0343
cond(Gesc)
ans = 1.9281
```

ans = 0.3623 0.0343 ✓ ($\bar{\sigma}$ menor que 1)

ans = 1.9281 ✓ (menor de 5)

Transitorio: análisis en frecuencia (SVD)

Sea modelo escalado $y(j\omega) = G_{esc}(j\omega)u(j\omega) + G_{d,esc}(j\omega)d(j\omega)$.

Todas las variables varían en la **esfera** $\|r\| \leq 1$ (especificación), $\|u\| \geq 1$ (deseado), $\|d\| \leq 1$ (modelado); se desea $y \approx r$ (seg. ref.) o $y \approx 0$ (rech. pert.).

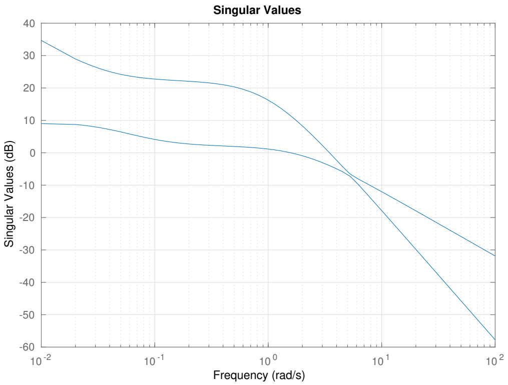
- **Seg. referencia:** Si $\underline{\sigma}(G_{esc}(j\omega)) \geq 1$, entonces $\overline{\sigma}(G^{\dagger}_{esc}) = 1/\underline{\sigma}(G_{esc}) \leq 1$
  - La acción $u(j\omega) = G^{\dagger}_{esc}(j\omega)r(j\omega)$ verifica $\|u(j\omega)\| \leq 1$ si $\|r(j\omega)\| \leq 1$.
- **Rechazo exacto perturbaciones:** Si $\overline{\sigma}(G^{\dagger}_{esc}G_{d,esc}) \leq 1$ entonces $\|u(j\omega)\| \leq 1$ para toda perturbación con $\|d(j\omega)\| \leq 1$.

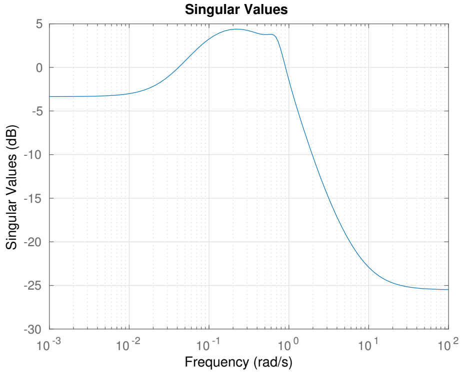
El análisis a frecuencia $\omega \approx 0$ es un análisis en equilibrio con la geometría de las "esferas" (SVD) en vez de los "cubos" (Prog.Lineal).

Ejemplo Matlab

```
s=tf('s');

G=[1/(s+1)^2 3/(s+2); -7/(s+1)^2 1/s];
Ey=diag([3 5]); Eu=diag([9 2.5]);

H=[1/(s+0.7)^2; 1.5/(s^2+0.4*s+0.5)]; Ed=3;

gesc=inv(Ey)*G*Eu; Hesc=inv(Ey)*H*Ed;

figure(1), sigma(gesc), grid on

figure(2), sigma(inv(gesc)*Hesc), grid on
```

Resultados


Singular Values
Singular Values (dB)
Frequency (rad/s)
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}


Singular Values
Singular Values (dB)
Frequency (rad/s)
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

Transitorio: cancel. parcial perturbaciones

- **Rechazo aproximado de perturbaciones:** Hagamos *SVD* de $G_{esc}(j\omega) = U(j\omega)S(j\omega)V^H(j\omega)$.

  Cambio de variable ortogonal
  $$\hat{y}(j\omega) = U^H(j\omega)y(j\omega), \qquad \hat{u}(j\omega) = V^H(j\omega)u(j\omega)$$

  - $\|y\| = \|\hat{y}\|, \quad \|u\| = \|\hat{u}\|$

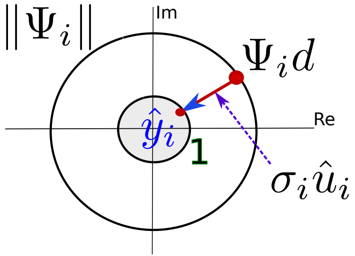
  En las nuevas coordenadas:
  $$\hat{y}(j\omega) = S(j\omega)\hat{u}(j\omega) + \underbrace{U^H(j\omega)G_{d,esc}(j\omega)}_{\Psi(j\omega)} d$$

  Linea a linea: $\hat{y}_i = \sigma_i \hat{u}_i + \Psi_i d$.
  Si d es un vector arbitrario de norma 1, entonces el peor caso (valor máximo) de $\Psi_i d$ es $\|\Psi_i\|$, dado que
  $\Psi_i d = \|\Psi_i\| \cdot \|d\| \cdot \cos(\alpha) \leq \|\Psi_i\|$.

En frecuencia, canc. parcial (2)

Por tanto, a partir de $\hat{y}_i = \sigma_i \hat{u}_i + \Psi_i d$,

- si $\|\Psi_i\| \leq 1$, la acción $\hat{u} = 0$ consigue $\|\hat{y}_i\| \leq 1$.
- En caso contrario ($\|\Psi_i\| > 1$), hay que analizar más:



Para que $\|\hat{y}_i\| \leq 1$,

$$\sigma_i \|\hat{u}_i\| \geq \|\Psi_i\| - 1$$

$$\|\hat{u}_i\| \geq \frac{\|\Psi_i\| - 1}{\sigma_i}$$

Por tanto, como $\|u_i\|$ no puede ser mayor que 1, se necesita $\boxed{\sigma_i \geq \|\Psi_i\| - 1.}$

Conclusiones (matemáticas)

- La selección de vbles a controlar y actuadores requiere una ganancia **por encima** de ciertos mínimos.
- Tres objetivos: seg. referencia, cancelación total perturb., cancelación parcial.
  - Cada objetivo puede ser deseado en equilibrio (gan. estática) o con cierta rapidez/ancho de banda (transitorio).
- Con grandes **asimetrías**, en régimen permanente: **poliedros**.
- En situaciones **simétricas** o/y a **frecuencia** no muy baja (transitorio), análisis con **valores singulares**. [Esferas/elipses]
- Se han discutido consideraciones **previas** al diseño de control, con algunas aproximaciones.
  - En fases posteriores, se refinan/complementan con simulaciones de los controladores, si el modelo detallado está disponible.

Conclusiones (ingeniería)

- Consideraciones **económicas** (coste de los actuadores, coste de la pérdida de calidad por desviación sobre valor de referencia) son **muy importantes**.
- La selección óptima de actuadores y referencias es un **compromiso** entre:
  - **Coste** actuadores de potencia grande
  - **Capacidad de control**: conseguir incrementos de salidas controladas deseados y compensar grandes perturbaciones
  - **Precisión** de los actuadores: actuadores más potentes suelen ser más imprecisos (en unidades absolutas, a misma imprecisión porcentual), la precisión a gran potencia es cara.
  - **Condicionamiento** y tolerancia a errores de modelado