

Solución ec. de medias y varianzas en proceso gaussiano lineal

Antonio Sala

Modelado, Identificación y Control de Sistemas Complejos

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/solecmv.html>



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Presentación

Motivación:

Las ecuaciones de medias y varianzas de un proceso estocástico lineal son EDO lineales. Deben tener solución con exponenciales de matrices; la de medias es bien conocida, la de varianzas también es muy importante en procesamiento estadístico de señal.

Objetivos:

Comprender la acumulación de ruido resolviendo la ecuación de medias y varianzas de un proceso estocástico lineal en un intervalo de tiempo.

Contenidos:

Preliminares. Ecuación de medias. Ecuación de varianzas. Conclusiones.



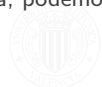
UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Modelo del proceso

Supongamos proceso lineal: $\dot{x} = Ax + Bu + Fw$ siendo u una entrada conocida, x el estado y w un ruido blanco continuo de distribución normal (proceso gaussiano), de parámetro de varianza I (PSD a todas las frecuencias).

Los incrementos infinitesimales verifican $dx = (Ax + Bu)dt + Fd\mathcal{W}$ siendo $\mathcal{W}$ el paseo aleatorio (proceso de Wiener) estándar, y $d\mathcal{W}$ sus incrementos infinitesimales $N(0, Idt)$.

* Si $d\mathcal{W}$ no fuera de varianza $I \cdot dT$, sino $\tilde{W}dt$, $\tilde{W} > 0$, la factorización de Choleski $\tilde{W} = QQ^T$ lo convertiría a $F' = FQ$ excitado por ruido blanco de PSD identidad. Viceversa, podemos eliminar F suponiendo que $E[d\mathcal{W}d\mathcal{W}^T] = F\tilde{W}F^T$.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Simulación del proceso

Si es gaussiano y la cond. inicial es de distrib. normal, sólo tenemos que simular medias y varianzas para tener una caracterización completa del proceso en todo instante.

Ecuación de medias:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + Bu$$

Ecuación de varianzas: (matricial)

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + W$$

siendo $W = F\tilde{W}F^T = WQQ^TF^T$ parámetro de dens. espectral potencia.

Solución ecuación de medias (factor integrante)

Multiplicando ambos lados por e^{-At} , tenemos

$$e^{-At} \frac{d\bar{x}}{dt} - e^{-At} A\bar{x} = e^{-At} Bu$$

con lo que

$$\frac{d(e^{-At}\bar{x})}{dt} = e^{-At} Bu, \quad e^{-A\tau}\bar{x}(\tau)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$e^{-At}\bar{x}(t) - \bar{x}(0) = \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

resultando la solución, bien conocida, de la EDO de 1er orden:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$



Solución ecuación de varianzas (factor integrante)

Si multiplicamos la ecuación $\frac{dP}{dt} - AP - PA^T = W$ por la izquierda por e^{-At} y por la derecha por $e^{-A^T t}$, resulta:

$$e^{-At} \frac{dP}{dt} e^{-A^T t} - e^{-At} A P e^{-A^T t} - e^{-At} P A^T e^{-A^T t} = e^{-At} W e^{-A^T t}$$

El lado izquierdo es:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At} P e^{-A^T t}) = e^{-At} \frac{dP}{dt} e^{-A^T t} - e^{-At} A P e^{-A^T t} - e^{-At} P A^T e^{-A^T t}$$

por lo que queda:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At} P e^{-A^T t}) = e^{-At} W e^{-A^T t}$$



Solución ec. de varianzas (2)

A partir de:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At} P e^{-A^T t}) = e^{-At} W e^{-A^T t}$$

podemos escribir:

$$(e^{-A\tau} P e^{-A^T \tau}) \Big|_0^t = \int_0^t e^{-A\tau} W e^{-A^T \tau} d\tau$$

$$e^{-At} P(t) e^{-A^T t} - e^{-A0} P(0) e^{A^T 0} = \int_0^t e^{-A\tau} W e^{-A^T \tau} d\tau$$

$$e^{-At} P(t) e^{-A^T t} = P(0) + \int_0^t e^{-A\tau} W e^{-A^T \tau} d\tau$$



Solución ec. varianzas (3)

$$e^{-At}P(t)e^{-A^T t} = P(0) + \int_0^t e^{-A\tau} W e^{-A^T \tau} d\tau$$

de modo que:

$$P(t) = e^{At}P(0)e^{A^T t} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} W e^{A^T (t-\tau)} d\tau$$

o, haciendo el cambio $t - \tau = \zeta$, también (suponemos W constante):

$$P(t) = e^{At}P(0)e^{A^T t} + \int_0^t e^{A\zeta} W e^{A^T \zeta} d\zeta$$



Solución ec. autocovarianza

Si $S(t, \tau) := E[x(t + \tau)x(t)^T]$, entonces verifica

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = AS$$

con lo que resulta

$$S(t, \tau) = e^{A\tau} S(t, 0) = e^{A\tau} P(t)$$



Conclusiones

- Conocidas media y varianza en función del tiempo, conocemos la distribución completa de un proceso gaussiano. Conociendo autocovarianza también conocemos la distribución condicional (predicción de unos instantes a partir de muestras en otros).
- La solución de las ecuaciones de medias, varianzas y autocovarianza es, respectivamente:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

$$P(t) = e^{At}P(0)e^{A^T t} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}We^{A^T(t-\tau)} d\tau$$

$$S(t, \tau) = e^{A\tau}S(t, 0) = e^{A\tau}P(t)$$

*Como $\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}e^{At}$, si A invertible, en caso u constante (escalón, ZOH) y W constante, pueden hacerse más manipulaciones de cara a su cálculo numérico, omitidas aquí por brevedad, discutidas en otros materiales.