

Métodos Subespacio para Identificación de Sistemas Dinámicos en Representación Interna

Antonio Sala Piqueras

Identificación de sistemas complejos

Dept. Ing. Sistemas y Automática (DISA)

Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/subsp2.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Presentación

Motivación:

Los modelos de predicción de salidas futuras para control predictivo y las matrices de observabilidad en representación interna están íntimamente relacionados. Los primeros se obtienen a partir de datos... ¿Pueden obtenerse estimados de estados y matrices de repr. interna a partir de datos de entrada-salida?

Objetivos:

Comprender que eso es posible, utilizando la descomposición en valores singulares.

Contenidos:

Modelos de predicción. Modelo de regresión entrada-salida. Descomposición en valores singulares para obtener la secuencia de estados. Estimación de matrices A , B , C , D . Conclusiones.

Modelos de predicción entrada-salida

En proceso lineal, determinista, orden n , combinaciones lineales de entradas y salidas pasadas permiten predecir con exactitud presente y futuro (junto con entradas presentes y futuras). Eligiendo horizontes de predicción h_f , y de memoria pasada h_p ($h_p \geq n$):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+h_f} \end{pmatrix}}_{Y_{fut,k}} = \bar{M}_1 \underbrace{\begin{pmatrix} y_{k-h_p} \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ u_{k-h_p} \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}}_{W_{past,k}} + M_2 \underbrace{\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+h_f} \end{pmatrix}}_{U_{fut,k}}$$

* Si $h_f \geq n$, existe una representación del sistema tal que $\text{rango}(M_1) = n$ – sólo se necesitan n combinaciones de variables pasadas para predecir el futuro –.



Relación con representación interna $ss(A,B,C,D)$

En proceso lineal, determinista, orden n , un vector de estado $x \in \mathbb{R}^n$, (junto con **entradas presentes y futuras**) permite escribir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+h_f} \end{pmatrix}}_{Y_{fut,k}} = \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{h_f} \end{pmatrix}}_{\mathbb{O}} x_k + \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{h_f-1}B & CA^{h_f-2}B & \cdots & CB & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+h_f} \end{pmatrix}}_{U_{fut,k}}$$

* Rango de \mathbb{O} (matriz de observabilidad) igual a número de estados observables, y $\bar{M}_1 W_{past,k} \equiv \mathbb{O} x_k$.

* Si $D = 0$ es conocido a priori, puede eliminarse u_{k+h_f} de la ecuación.



Modelo de regresión

Si planteamos la ecuación para múltiples datos de las ν muestras entrada-salida tomadas del proceso, debemos identificar M_1 y M_2 por mínimos cuadrados matriciales:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_k & y_{k+1} & \dots \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ y_{k+h_f} & y_{k+h_f+1} & \dots \end{pmatrix}}_{Y_{fut} \text{ } [(h_f+1) \times \nu]} \approx M_1 \underbrace{\begin{pmatrix} y_{k-h_p} & y_{k-h_p+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ y_{k-1} & y_k & \dots \\ u_{k-h_p} & u_{k-h_p+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ u_{k-1} & u_k & \dots \end{pmatrix}}_{W_{past} \text{ } [2h_p \times \nu]} + M_2 \underbrace{\begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \\ u_{k+h_f} & u_{k+h_f+1} & \dots \end{pmatrix}}_{U_{fut} \text{ } [(h_f+1) \times \nu]}$$

$$Y_{fut} \approx (M_1 \ M_2) \cdot \begin{pmatrix} W_{past} \\ U_{fut} \end{pmatrix} + \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad (\hat{M}_1 \ \hat{M}_2) = Y_{fut} \cdot \begin{pmatrix} W_{past} \\ U_{fut} \end{pmatrix}^\dagger$$

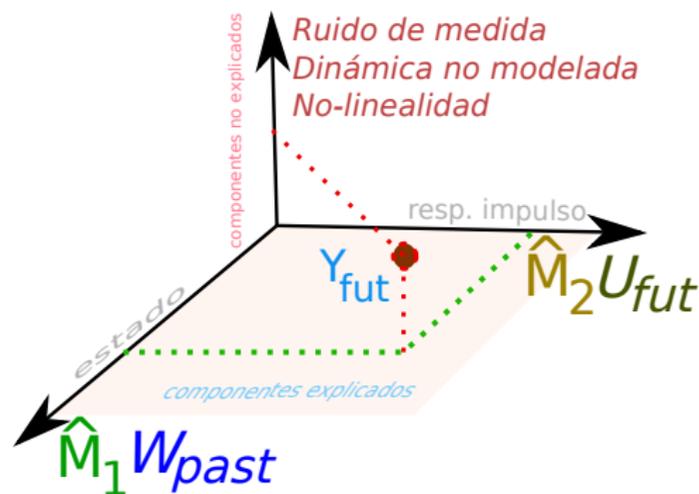
Requisitos sobre la entrada

Excitación e independencia de entrada:

- Para que el predictor con modelo \hat{M}_1 sea “independiente” del futuro (esto es, que sea la mejor predicción dado “sólo el pasado” y también dado el “pasado y entrada futura”) es necesario que W_{past} y U_{fut} no tengan correlación (entrada no correlada con historia pasada, datos en **bucle abierto**).
- Supondremos que la entrada excita “todos” los estados (controlables) del proceso, matriz de varianzas covarianzas invertible (bien condicionada).



Interpretación geométrica de los mínimos cuadrados



El vector Y_{fut} es **proyectado** sobre tres **subespacios** ortogonales:

- El generado por entradas futuras U_{fut} ,
- El generado por las filas de W_{past} (información del pasado con correlación con el futuro... “**estado**”),
- El **resíduo** no explicado.



Idea básica: rango/SVD

La matriz $F := \hat{M}_1 W_{past}$ es una proyección de Y_{fut} sobre las combinaciones lineales de las filas de W_{past} , es el componente de Y_{fut} explicado por el pasado.

Interpretación 1 (proyección): En caso determinista, el rango de la proyección $F = \hat{M}_1 W_{past} = \mathbb{O} \cdot [x_k \ x_{k+1} \ \dots]$ debe ser, como mucho, igual al rango de \mathbb{O} , número estados observables.

Interpretación 2 (O-PLS): Si \hat{M}_1 tiene rango n , $n \leq (h_p + h_p + 1)$, el SVD de M_1 nos permitirá establecer un predictor con menos variables.



Identificación subespacio mediante SVD de la proyección

Con la primera interpretación, el $\text{svd}(F, 'econ')$ debería dar

$$F_{(h_f+1) \times \nu} = U_{(h_f+1) \times n} \cdot S_{n \times n} \cdot (V_{\nu \times n})^T.$$

La relación entre modelo entrada-salida y representación interna es

$$F = \hat{M}_1 W_{past} = \mathbb{O} \cdot [x_k \ x_{k+1} \ \dots].$$

Resultado principal ► Si definimos matr. de observabilidad y secuencia de estados como:

$$\mathbb{O} := US^{1/2}, \quad [x_k \ x_{k+1} \ \dots] := S^{1/2}V^T$$

se cumple $F = \mathbb{O} \cdot [x_k \ x_{k+1} \ \dots]$.

Con datos “prácticos” (ruido), suponer $\mathbf{0}$ los elementos **pequeños** de $\text{diag}(S)$.

*Si la entrada es ruido blanco de varianza I , la realización es parecida a la “equilibrada”: la varianza de cada fila de x es proporcional al elemento diagonal de $S^{1/2}$, y no está correlada con los otros (V es matriz ortogonal): el gramiano de controlabilidad es proporcional a $S^{1/2}$, si h_f tiende a infinito, el gramiano de observabilidad es también proporcional a $S^{1/2}$.

Con entrada de varianza no identidad, o si se desea hacer mínimos cuadrados “ponderados” sobre las predicciones de salida, existen modificaciones del algoritmo, haciendo el SVD de $W_1 \cdot F \cdot W_2$ que no se describen aquí por brevedad.

Identificación subespacio mediante SVD de la proyección

Con la primera interpretación, el $\text{svd}(F, 'econ')$ debería dar

$$F_{(h_f+1) \times \nu} = U_{(h_f+1) \times n} \cdot S_{n \times n} \cdot (V_{\nu \times n})^T.$$

La relación entre modelo entrada-salida y representación interna es

$$F = \hat{M}_1 W_{past} = \mathbb{O} \cdot [x_k \ x_{k+1} \ \dots].$$

Resultado principal ► Si definimos matr. de observabilidad y secuencia de estados como:

$$\mathbb{O} := US^{1/2}, \quad [x_k \ x_{k+1} \ \dots] := S^{1/2}V^T$$

se cumple $F = \mathbb{O} \cdot [x_k \ x_{k+1} \ \dots]$.

Con datos “prácticos” (ruido), suponer 0 los elementos **pequeños** de $\text{diag}(S)$.

*Si la entrada es ruido blanco de varianza I , la realización es parecida a la “equilibrada”: la varianza de cada fila de x es proporcional al elemento diagonal de $S^{1/2}$, y no está correlada con los otros (V es matriz ortogonal): el gramiano de controlabilidad es proporcional a $S^{1/2}$, si h_f tiende a infinito, el gramiano de observabilidad es también proporcional a $S^{1/2}$.

Con entrada de varianza no identidad, o si se desea hacer mínimos cuadrados “ponderados” sobre las predicciones de salida, existen modificaciones del algoritmo, haciendo el SVD de $W_1 \cdot F \cdot W_2$ que no se describen aquí por brevedad.

Identificación subespacio mediante O-PLS

Nota: Los resultados son equivalentes a la interpretación anterior.

[1.] Normalización y preblanqueado (ortonormalización): Dividir el pasado en componentes “independientes” no correlados

$$W_{past}^{white} = \left(\sqrt{\Sigma_{W_{past}}} \right)^{\dagger} \cdot W_{past}$$

*Dada una matriz $\Sigma \geq 0$, entenderemos $(\sqrt{\Sigma})^{\dagger} = V \cdot pinv(\sqrt{D}) \cdot V^T$, siendo Σ diagonalizada como $\Sigma = VDV^T$, y $pinv(\sqrt{D})$ la inversa de la raíz cuadrada de los elementos diagonales, o cero en los elementos diagonales de D que sean cero.

- Con esta ortonormalización, los coeficientes del estimador de mínimos cuadrados que multiplican a un componente son los mismos se disponga o no de los otros componentes de W_{past} .

Identificación subespacio con O-PLS (cont.)

[2.] Identificamos M_1 y M_2 por mínimos cuadrados matriciales a partir de series de datos experimentales entrada-salida, después de preblanqueado de la matriz verde (paso 1, indicado con *):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_k & y_{k+1} & \dots \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k+h_f} & y_{k+h_f+1} & \dots \end{pmatrix}}_{Y_{fut} [(h_f+1) \times \nu]} \approx M_1 \underbrace{\begin{pmatrix} y_{k-h_p} & y_{k-h_p+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-1} & y_k & \dots \\ u_{k-h_p} & u_{k-h_p+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k-1} & u_k & \dots \end{pmatrix}}_{W_{past}^{white} [2h_p \times \nu]} + M_2 \underbrace{\begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+h_f} & u_{k+h_f+1} & \dots \end{pmatrix}}_{U_{fut} [(h_f+1) \times \nu]}$$

$$Y_{fut} \approx (M_1 \ M_2) \cdot \begin{pmatrix} W_{past}^{white} \\ U_{fut} \end{pmatrix}, \quad M_1 \text{ es } [(h_f + 1) \times 2h_p]$$

Identificación subespacio: selección de orden

[3.] Hacemos SVD de $M_1 = \text{cov}(Y_{fut}, W_{past}^{white}) = USV^T$, como indica el algoritmo O-PLS, para determinar los componentes de W_{past}^{white} que más varianza de Y_{fut} explican.

$$Y_{fut} = USV^T \cdot W_{past}^{white} + M_2 U_{fut}$$

Orden estimado n del sistema: núm. de elementos de S

“significativamente más grandes que el resto” (no nulos, si los datos fueran sin ruido, lo que nunca ocurre en la práctica).

*Estamos determinando cuántas combinaciones lineales de los elementos de W_{past}^{white} (incorrelados entre sí) tienen un efecto significativo para predecir Y_{fut} .



Identificación subespacio: generación secuencia estados

$$Y_{fut} = USV^T W_{past}^{white} + M_2 U_{fut}$$

[4.] Seleccionando las columnas de V asociadas a los valores singulares “no nulos”, $\tilde{V}_x = V(:, 1:n)$, y el fragmento \tilde{S} diagonal correspondiente, tenemos las combinaciones de entradas y salidas pasadas que influyen en el futuro: hemos encontrado **estados de la realización**.

$$Y_{fut} = U \tilde{S} \tilde{V}_x^T W_{past}^{white} + M_2 U_{fut}$$

Hacemos el cambio $\Psi_x = \tilde{S}^{1/2} \tilde{V}_x^T W_{past}$; Ψ_x tiene n filas. Las columnas de Ψ_x pueden asimilarse a los valores estimados $[\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \dots]$

$$Y_{fut} = \underbrace{U \tilde{S}^{1/2}}_{\text{O}} \cdot \underbrace{\Psi_x}_{n \times \nu} + M_2 U_{fut}$$



Identificación subespacio: generación secuencia estados

$$Y_{fut} = USV^T W_{past}^{white} + M_2 U_{fut}$$

[4.] Seleccionando las columnas de V asociadas a los valores singulares “no nulos”, $\tilde{V}_x = V(:, 1 : n)$, y el fragmento \tilde{S} diagonal correspondiente, tenemos las combinaciones de entradas y salidas pasadas que influyen en el futuro: hemos encontrado **estados de la realización**.

$$Y_{fut} = U \tilde{S} \tilde{V}_x^T W_{past}^{white} + M_2 U_{fut}$$

Hacemos el cambio $\Psi_x = \tilde{S}^{1/2} \tilde{V}_x^T W_{past}$; Ψ_x tiene n filas. Las columnas de Ψ_x pueden asimilarse a los valores estimados $[\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \dots]$

$$Y_{fut} = \underbrace{U \tilde{S}^{1/2}}_{\textcircled{1}} \cdot \underbrace{\Psi_x}_{n \times \nu} + M_2 U_{fut}$$



Identificación subespacio: Matrices A, B, C, D.

[5.] Con \hat{x}_k la columna k de Ψ_x , la ec. de estado permite escribir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} & \hat{x}_{k+2} & \dots \end{pmatrix}}_{\Psi_{x+}} \approx \hat{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots \end{pmatrix}}_{\Psi_x} + \hat{B} \cdot \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots \end{pmatrix}$$

de forma análoga, la ecuación de salida, para el conjunto de muestras, es:

$$\begin{pmatrix} y_k & y_{k+1} & \dots \end{pmatrix} \approx \hat{C} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots \end{pmatrix} + \hat{D} \cdot \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots \end{pmatrix}$$

Con lo que, todo junto, resulta en

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} & \hat{x}_{k+2} & \dots \\ y_k & y_{k+1} & \dots \end{pmatrix}}_{\Psi_{[x+,y]}} \approx \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots \\ u_k & u_{k+1} & \dots \end{pmatrix}}_{\Xi}$$

obteniendo: $\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \Psi_{[x+,y]} \cdot \text{pinv}(\Xi).$

[FIN DEL ALGORITMO]

Conclusiones

El algoritmo **subespacio** permite obtener matrices A , B , C , D a partir de series de datos entrada-salida (multivariables: u_k , y_k pueden ser vectores) usando **mínimos cuadrados** (matriciales) y **SVD** (para determinar el orden de la realización).

*Existen variaciones en la literatura, con pesos W_1 , W_2 en salidas y regresores, entradas no blancas, así como la opción de usar CVA (correlaciones canónicas) en vez de O-PLS para la regresión, versiones en bucle cerrado, etc.

Matlab System ID Toolbox: `n4sid`.

