Proceso de Wiener (movimiento browniano) 1D: Interpretación y Propiedades

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**wienerprops**.html

Introducción

Motivación: ya en 1827 R. Brown postuló un movimiento donde los incrementos eran aleatorios en granos de polen (pero hay referencias hasta en escritos romanos, según Wikipedia). Tenía que ser una suma de movimientos al azar en fracciones infinitesimales de tiempo. Dio lugar a desarrollos físico/matemáticos importantes en el s. XX.

Objetivos: Comprender el concepto de paseo aleatorio contínuo. Comprender las propiedades del proceso estocástico resultante.

Contenido:

Paseo aleatorio discreto. Límite continuo. Propiedades. Conclusiones.

Paseo aleatorio en tiempo discreto

Sea el sistema $x_{k+1} = x_k + w_k$, con $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, ruido blanco (indep de w_j, $j \neq k$; indep de x_k).

Entonces la ec. de medias es: $E(x_{k+1}) = E(x_k) + 0$

y la de vzas: $E(x_{k+1}^2) = E(x_k^2 + 2x_k w_k + w_k^2) = E(x_k^2) + \sigma^2$.

Si cond. iniciales es $x_0 = 0$ determinista, entonces $x_k = \sum_{j=0}^{k-1} w_j$, con lo que:
$E(x_k) = 0$, varianza $E(x_k^2) = k\sigma^2$, desv. típica $\sqrt{k} \cdot \sigma$.

Incrementos del paseo aleatorio

Como es un "integrador", en ocasiones trabajaremos con sus "incrementos".

Se cumple que $E[(x_{k+1} - x_k)^2] = E[w_k^2] = \sigma^2$, trivialmente... pero también, $j > 0$:

$$E[(x_{k+j} - x_k)^2] = E[\sum_{q=k}^{k+j-1} w_q^2] = \sigma^2 \cdot j$$

La varianza del incremento sólo depende de la diferencia de tiempo ("incrementos estacionarios").
Asimismo, los incrementos entre "k_4 y k_3" son independientes de los incrementos entre "k_2 y k_1" si $k_4 > k_3 > k_2 > k_1$,
$E[(x_{k_4} - x_{k_3})(x_{k_2} - x_{k_1})] = 0$ si los intervalos $[k_3, k_4]$ y $[k_1, k_2]$ no se solapan.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Movimiento browniano en tiempo contínuo

En general, si en 1 segundo hay N muestras, $T_s = 1/N$, $t = kT_s$, $k = Nt$ para $t = 0, 1/N, 2/N, \ldots$

Entonces, para que $E(x(t)^2) = t$, con $x_{k+1} = x_k + w_k$, como $E[x(t)^2] \equiv E[x^2_{\underbrace{Nt}_{k}}] = Nt \cdot \sigma^2$, se debe verificar $\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}}$, o sea $\sigma = \sqrt{T_s}$.

Haciendo tender $N \to \infty$ $(T_s \to 0)$ obtenemos en el límite una función en tiempo contínuo, suma infinita de variables aleatorias $dx \sim N(0, dt)$.

Este proceso estocástico $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ se denomina **Proceso de Wiener** o **Movimiento Browniano** en tiempo continuo.

Es una "función aleatoria" $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, un proceso estocástico (colección de infinitas variables aleatorias relacionadas entre sí).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Interpretación física

- Movimiento al azar de partículas por agitación térmica.
- Se usa en explicaciones de las causas "microscópicas" de la "difusión" o "transmisión de calor".
- La EDP de los fenómenos de difusión inspiró ecuaciones en derivadas parciales para la función de densidad de $x(t)$, Fokker-Planck.
- Existen modelos económicos (Black-Scholes) donde "tasa de inflación o interés es un movimiento browniano", y se usa la exponencial de ese proceso para estimar precios de activos (precio siempre > 0).
- La derivada del proceso de Wiener (derivada de la integral de ruido) es el "ruido blanco" que excita a los "procesos físicos con ruido".

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Proceso de Wiener: notación usual

Al proceso de Wiener se le suele nombrar en vez de $x(t)$ (estado del integrador, en control solemos llamar x al estado de un sistema dinámico), como W_t o B_t, de “Wiener” y “Browniano”, respectivamente.

Verifica que su incremento infinitesimal dW (o dB en otros libros) es una variable aleatoria tal que $E[dW] = 0$, $E[dW^2] = dt$.

Un proceso físico de estado X que se mueva con movimiento Browniano lo representaremos con $dx = dW$... es un poco “redundante”, excepto que si además de ese “ruido” tiene alguna parte determinista, se representará, por ejemplo, una descarga de condensador con:

$$dx = -(RC)x \cdot dt + \sigma \cdot dW$$

* Parte “determinista” $dx = -RCx \cdot dt$, $\frac{dx}{dt} = -RCx$; parte ruido... superposición de incrementos “al azar” tipo Wiener.

Propiedades del proceso de Wiener (1)

Heredadas del discreto (límite), para gastar en predicción (varianzas y covarianzas):

- W_t tiene distribución normal, de media cero y varianza proporcional al tiempo $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, $E[W_t]=0$, $E[(W_t)^2]=t$;
  $\Rightarrow$ desv. típica proporcional a $\sqrt{t}$
- Incrementos estacionarios: $W_{t_2}-W_{t_1} \sim \mathcal{N}(0,t_2-t_1)$, para $t_2>t_1$.
- Incrementos independientes: si $t_1<t_2<t_3<t_4$,
  $E[(W_{t_2}-W_{t_1})\cdot(W_{t_4}-W_{t_3})]=0$.
- La covarianza entre W_{t_1} y W_{t_2}, con $t_1<t_2$ es t_1 (está "normalizado").
  En efecto, $W_{t_2}=W_{t_1}+\xi$, con $\xi \sim N(0,t_2-t_1)$; por tanto,
  $E[W_{t_1}W_{t_2}]=E[W_{t_1}(W_{t_1}+\xi)]=E[W_{t_1}^2]=t_1$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Propiedades del proceso de Wiener (2)

- Es auto-similar, al estilo de los "fractales".
  Formalmente, el proceso $V_t := \frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}$ es también un proceso de Wiener.
  - En efecto, si cojo una realización "desde $t = 0$ hasta 2", tendré varianza desde 0 hasta 2, lo divido por $\sqrt{2}$, tendré varianza de 0 a 1, lo comprimo a $t \in [0, 1]$ y recupero otra realización del proceso de Wiener.
  - Viceversa: si una realización $t \in [0, 0.1]$ la "estiro" hasta $t \in [0, 1]$ y la multiplico por $\sqrt{10}$, tengo otra realización del proceso de Wiener...
    Esto se puede hacer "ad-infinitum", tenemos "estructura" y "variabilidad" que no desaparece por mucho que ampliemos.

Propiedades del proceso de Wiener (3)

- Es continuo "con probabilidad 1"... La probabilidad de que $N(0, dt) > \epsilon$ cuando dt tiende a cero es cero, para todo $\epsilon > 0$.

- No es "derivable" en ningún punto "con probabilidad 1". En efecto $\frac{N(0,dt)}{dt}$ es una variable aleatoria (para dt finito) de desv. típica $\frac{\sqrt{dt}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{dt}}$, y varianza $\frac{1}{dt}$... cuando eso tiende a cero es una señal "de varianza infinita": la probabilidad que sea $|dx| < \epsilon$ es cero.
  - Por eso antes se ha puesto $dx = -(RC)x \cdot dt + \sigma \cdot dW$ y no $\frac{dx}{dt} = -(RC)x + \sigma \cdot \frac{dW}{dt}$... Porque $\frac{dW}{dt}$ no existe para los matemáticos...
  - Los ingenieros, de todos modos, lo llamamos "ruido blanco continuo w" y ponemos *informalmente* $\frac{dx}{dt} = w$ para el proceso de Wiener, y $\frac{dx}{dt} = -(RC)x + \sigma w$ para el condensador.

Conclusiones

- Proceso inspirado en el límite de un integrador discreto $x((k+1)T_s) = x(kT_s) + w_k \ldots$ es un "integrador con ruido".
- Teoría "formal" requiere muchas matizaciones:
  - **Ecuaciones diferenciales estocásticas** (Itô, Stratonovich)
- Inspirado en el movimiento aleatorio de granos de polen (Brown) o, alternativamente, como difusión, transmisión de calor.
  - Ecuaciones **Fokker-Planck**, interpretando la función de densidad como una "concentración" en un problema de difusión de un compuesto químico.
- Aplicaciones en física, economía y, cómo no, en **teoría de control** de sistemas **continuos** o **muestreados** (sampled-data).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA