Ganancia máxima y Mínima; Condicionamiento Numérico

Antonio Sala
Universitat Politecnica de Valencia

`Presentación en vídeo en:`
`http://personales.upv.es/asala/YT/V/OAcondnum.html`

Problema a resolver

Muchas facetas de ingeniería requieren resolver sistemas lineales, optimización lineal, etc., entre ellas la ingeniería de control.

Objetivo:

- Determinar "sensibilidad" de los resultados a:
  - Cambios en las entradas
  - Cambios en los parámetros de un modelo.
- Si dicha sensibilidad es alta, el resultado no es lo suficientemente **robusto**.

Contenido

- Ejemplos de motivación, Normas de vectores, Ganancia máxima y mínima de una matriz, Condicionamiento.

Ejemplo

- Determinado modelo físico produce el modelo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

- ¿Es "robusto"?
  - ¿un cambio pequeño en "y" produce un cambio pequeño en "u"?
  - ¿un cambio de 3 a 3.05 en a_{11} es importante?

Ejemplo

- inv(A)*[2; 2] $=$
  0.5185
  0.2222
- inv(A)*[2.05; 2] $=$
  0.5278
  0.2333

Cambios pequeños en "y" NO afectan mucho al resultado de resolverlo.

Ejemplo no robusto:

- A =
  3.0000 2.0000
  6.0000 4.2500
- inv(A)*[4; 8]
  ans =
  1.3333
  0
- inv(A)*[3.9; 8.05]
  ans =
  0.6333
  1.0000

Cambios pequeños en los datos producen cambios grandes en la solución.

Ejemplo no robusto (2):

El objetivo es obtener u tal que $y = Au = [8; -4]$, o sesa $u = A^{-1}y$.

- $u_{real} = A_{real}^{-1}y$ =inv([3 2;6 4.25])*[8; -4]=
  56.0000
  -80.0000
- $\hat{u} = \hat{A}^{-1}y$ =inv([3 2;6 4.15])*[8; -4] =
  91.5556
  -133.3333

Si se usa la segunda solución $\hat{u} = (91.55, -133.33)$ obtenida con un modelo "imperfecto" (coef. 4.15) en el modelo "real" (coef. 4.25), se obtiene $A_{real} * \hat{u} = [8, -17]$.

Cómo detectar el problema?

- Si, para ciertos vectores u_{big}, Au_{big} es "grande" (tamaño 100)
- Si, para ciertos vectores u_{sm}, Au_{sm} es "pequeño" (tamaño 1)
- Entonces $A * (u_{sm} + 0.01 * u_{big}) = A * u_{sm} + 0.01 * A * u_{big}$
- El término $0.01 * u_{big}$ puede ser "ruido" (imprecisión en u_{sm}).
- El error $0.01Au_{big}$ tiene tamaño 1, comparable a $A * u_{sm}$
- Pequeños errores en algunos cálculos producen resultados con 100% de error.
- Comprobar si tamaño $A * u$ es muy diferente según la "dirección" de u.

Normas de vectores

- el "tamaño" de entradas y salidas se determinara con la norma euclídea

$$\|u\| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots}$$

- En notación vectorial:

$$\|u\| = \sqrt{u^T u}$$

- La norma preserva la multiplicación por escalar:

$$\|2u\| = 2\|u\|$$

Ganancia máxima y mínima de una matriz

Dado que $A * 2 * u = 2 * A * u$, sólo nos interesan los vectores u de norma unidad. El resto, puro escalado proporcional.

- Definición de ganancia máxima y mínima:

$$\overline{\sigma}(A) := \max_{\|u\|=1} \|Au\| \qquad (1)$$

$$\underline{\sigma}(A) := \min_{\|u\|=1} \|Au\| \qquad (2)$$

Verifica: $\underline{\sigma}(A) \cdot \|u\| \leq \|Au\| \leq \overline{\sigma}(A) \cdot \|u\|$

- Número de condición:

$$\gamma(A) := \frac{\overline{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)}$$

Cómo se calcula: $\overline{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$, $\underline{\sigma}(A) = \sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}$.
Matlab: `svd`, `cond`.

Condicionamiento numérico

Sea $Ax = b$. El máximo error relativo debido a incertidumbre en x, $\delta b = A(x + \delta x) - b = A\delta x$ es:

$$\max \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \max \frac{\|A\delta x\|}{\|Ax\|} = \frac{\max \|A\delta x\|}{\min \|Ax\|} = \frac{\overline{\sigma}(A)\|\delta x\|}{\underline{\sigma}(A)\|x\|} = \gamma(A)\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

Obviamente, el mínimo se da en las direcciones de entrada x asociadas a bajas ganancias; en las direcciones de alta ganancia el resultado es más confiable.

Ejemplo

Las matrices consideradas anteriormente eran una “buena” [3 2;6 -5] y una “mala”: [3 2; 6 4.25].
En efecto:

```
cond([3 2;6 -5])
ans =
2.3073
```

```
cond([3 2; 6 4.25])
ans =
89.4055
```

Consideraciones en control

- Los puntos de operación deben estar calculados de modo que
  1. la ganancia **mínima** de un proceso sea suficiente para alcanzarlos sin saturar,
  2. El condicionamiento numérico sea adecuado (robustez).

- Si el número de condición es alto, los resultados no son de confianza en las direcciones de poca ganancia.
  - Ganancia min 1, max 20: Un error relativo del 5% puede convertirse en un 100% de error en los resultados.
  - Si el número de condición es alto, pequeños cambios en el modelo producen grandes cambios en los resultados.

- Modelos multivariables experimentales (5% error en sensores, parámetros) con $\gamma > 20$ son **inutilizables**: funcionan en teoría pero en la práctica obtienen resultados muy distintos.

Ejercicio propuesto

Planta G y modelo $\hat{G}$:

$$G(s) = \frac{1}{75s+1}\begin{pmatrix} 87.8 & -86.4 \\ 108.2 & -109.6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{76s+1}\begin{pmatrix} 87 & -88 \\ 108 & -108 \end{pmatrix}$$

- Comprobar condicionamiento de la matriz de ganancia G(0)
- Comprobar si $G(0)\hat{G}(0)^{-1} \approx I$ o no...
  - Si **no** es el caso, ningún control con $\hat{G}$ funcionará bien en la realidad con G.