

Discretización de sistemas lineales

representación interna, retenedor orden cero

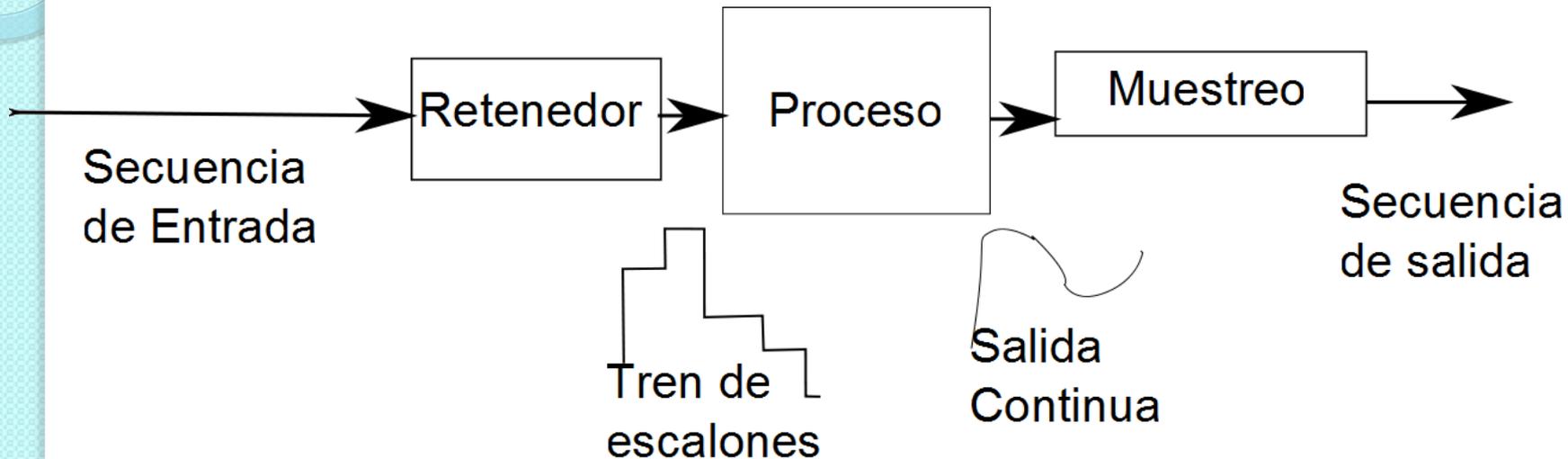
Antonio Sala

Notas de clase sobre ing. control, control multivariable

Vídeo presentación en
<https://youtu.be/z4JYNL9U4U>

Bucle de control por computador

- Retenedor->Proceso->Muestreador



- Período de muestreo regular
- Medir $y(k)$; calcular control; escribir control $u(k)$; esperar hasta siguiente muestra.

Variables de estado

Concepto de estado: Las variables de estado (**vector de estado** x) son aquéllas que almacenan la energía/historia pasada de modo que las trayectorias futuras de todas las variables de interés y sólo dependen de condiciones iniciales de ellas y de valores presentes y futuros de entrada.

$$y(t) = \Xi(x(0), u(\xi)_{\xi \in [0,t]})$$

Representación normalizada (1):

Ecuaciones de estado: En sistemas no-lineales genéricos (izquierda) o lineales/linealizados (derecha), se tiene:

- Sistemas de tiempo **continuo**, $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

- Sistemas de tiempo **discreto**, $t := k \in \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \qquad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

- Sistemas **muestreados** (período de muestreo T):
 - **Muestreo:** $x_k := x(kT)$. Se descartan x intermedios.
 - **Retenedor:** fórmula de $u(t)$ para $kT \leq t < (k+1)T$.
 - ZOH, retenedor **orden cero**: $u(t) = u_k$. El usado en aplicaciones.
 - Otros retenedores: extrapolación basado en muestras pasadas... sólo tienen interés "teórico".

Representación normalizada (2):

Ecuaciones de salida:

- Son ecuaciones **estáticas**, todas en el mismo instante. Tienen la misma forma sea el tiempo discreto o continuo dado que se refieran a un instante “aislado”:

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y_k = g(x_k, u_k)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

DISCRETIZACIÓN:

- Obtener las ecuaciones discretas (estado y salida) de un sistema continuo muestreado.
- Ecuaciones de salida no cambian.
- Ecuaciones de estado requieren resolver la EDO continua: calcular $x((k+1)T)$ en función de $x(kT)$ y la entrada (desde kT a $(k+1)T$, según fórmula de retenedor). Se abordará el caso **lineal**.

Revisión de conceptos: EDO de primer orden

- Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

- Si A fuera una constante, el resultado sería

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

- En efecto,

$$\dot{x} = Ae^{At}x(0) = A \cdot (e^{At}x(0)) = A \cdot x(t)$$

EDO primer orden MATRICIAL

- Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

- El concepto de **exponencial de matriz** generaliza esa solución al caso matricial $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} A^3 t^3 + \dots$$

- Derivando respecto al tiempo se cumple $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$; en efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= 0 + A + A^2 t + \frac{1}{2} A^3 t^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i \cdot i \cdot t^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} A^i \cdot t^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^{j+1} t^j = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j t^j = A e^{At} = e^{At} A \end{aligned}$$

EDO matricial: conclusiones

Teorema

La solución de la ecuación diferencial multivariable

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

viene dada por $x(t) = e^{At}x(0)$

Matlab: Se utiliza el comando `expm(A)`.

***Nota:** Si la matriz es diagonalizable, $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$ entonces $e^{At} = V \cdot e^{Dt} \cdot V^{-1}$ siendo la exponencial de una matriz diagonal la exponencial de los elementos en dicha diagonal: `expm(diag([d1, d2, ...]))=diag([exp(d1),exp(d2),...])`.

Discretización “retenedor orden cero”

- Consideremos un sistema continuo con ecuación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A_c x + B_c u$$

- La ecuación de un **retenedor de orden cero** es $\frac{du}{dt} = 0$.

Expresando el modelo y el retenedor en forma normalizada, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

- Equivalentemente, reescribimos la ecuación con la notación de vectores y matrices ampliados:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Discretización “retenedor orden cero”

- Consideremos un sistema continuo con ecuación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A_c x + B_c u$$

- La ecuación de un **retenedor de orden cero** es $\frac{du}{dt} = 0$.

Expresando el modelo y el retenedor en forma normalizada, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

- Equivalentemente, reescribimos la ecuación con la notación de vectores y matrices ampliados:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi$$

Discretización “retenedor orden cero”

- Consideremos un sistema continuo con ecuación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A_c x + B_c u$$

- La ecuación de un **retenedor de orden cero** es $\frac{du}{dt} = 0$.

Expresando el modelo y el retenedor en forma normalizada, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

- Equivalentemente, reescribimos la ecuación con la notación de vectores y matrices ampliados:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi$$

Retenedor orden cero, continuación:

- Resolvemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi(t) = e^{\mathcal{A}t}\xi(0)}$$

- dicha ecuación, un período de muestreo, denotado como T , más tarde, dará lugar a:

$$\xi(T) = \begin{pmatrix} x(T) \\ u(T) \end{pmatrix} = e^{\mathcal{A}\cdot T} \begin{pmatrix} x(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

donde Ξ_{ij} denotan submatrices de $e^{\mathcal{A}\cdot T}$ con las dimensiones adecuadas.

Fórmula final

Dividimos las filas en *dos* grupos (actualización de estado, actualización de entrada):

$$x(T) = \Xi_{11}x(0) + \Xi_{12}u(0), \quad u(T) = \Xi_{21}x(0) + \Xi_{22}u(0)$$

- El izquierdo es la **nueva ecuación de estado** discreta, definiendo $A_d := \Xi_{11}$, $B_d := \Xi_{12}$, y dando como condición inicial $x(0) = x_k$, $u(0) = u_k$, siendo el estado T segundos después $x(T) = x_{k+1}$:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$$

- Como con entrada $u = 0$ la respuesta libre es $\dot{x} = A_c x$, por fuerza $\Xi_{11} = e^{A_c T}$.
- El derecho siempre sale $u(T) = u(0)$, dado que es la discretización de $\dot{u} = 0$: $\Xi_{21} = 0$, $\Xi_{22} = I$. Como T segundos después la acción de control sí cambia, el término derecho se DESECHA.

Fórmula final

Dividimos las filas en *dos* grupos (actualización de estado, actualización de entrada):

$$x(T) = \Xi_{11}x(0) + \Xi_{12}u(0), \quad u(T) = \Xi_{21}x(0) + \Xi_{22}u(0)$$

- El izquierdo es la **nueva ecuación de estado** discreta, definiendo $A_d := \Xi_{11}$, $B_d := \Xi_{12}$, y dando como condición inicial $x(0) = x_k$, $u(0) = u_k$, siendo el estado T segundos después $x(T) = x_{k+1}$:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$$

- Como con entrada $u = 0$ la respuesta libre es $\dot{x} = A_c x$, por fuerza $\Xi_{11} = e^{A_c T}$.
- El derecho siempre sale $u(T) = u(0)$, dado que es la discretización de $\dot{u} = 0$: $\Xi_{21} = 0$, $\Xi_{22} = I$. Como T segundos después la acción de control sí cambia, el término derecho se DESECHA.

Conclusiones

- Fórmula **exacta** de discretización de sistemas lineales multivariados con retenedor orden cero (entrada constante entre muestreos)
- Basada en la **exponencial** de una matriz **ampliada** \mathcal{A} .
- Si la entrada **no es constante** entre muestreos, o si el proceso **no es lineal** (invariante en tiempo), la fórmula ya **no es válida**.
 - En ese caso, aplicar EULER, bilineal/punto medio, Runge-Kutta, ...
 - La fórmula exponencial sirve para discretizar *procesos continuos controlados por computador* pero **no reguladores continuos** (su entrada no es *constante entre muestreos*).