

Interconexión de sistemas: estabilidad interna

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/estint.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación:

En un diagrama de bloques pueden aparecer elementos interconectados (en control multivariable, recomendable en representación interna).

Eliminar variables puede dejar un subconjunto de funciones de transferencia estables, pero existir variables internas que van a infinito.

Objetivos:

Comprender el concepto de estabilidad interna y cómo evaluarlo.

Contenidos:

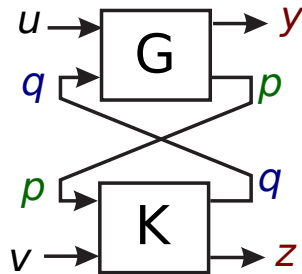
La interconexión LFT, revisión. Estabilidad interna. Ejemplo.



Interconexión en representación interna

Las ecuaciones de este bucle son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= A_G x_G + [B_{G1} \ B_{G2}] \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{G1} \\ C_{G2} \end{pmatrix} x_G + \begin{pmatrix} D_{G11} & D_{G12} \\ D_{G21} & D_{G22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} \\ \dot{x}_K &= A_K x_K + [B_{K1} \ B_{K2}] \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{K1} \\ C_{K2} \end{pmatrix} x_K + \begin{pmatrix} D_{K11} & D_{K12} \\ D_{K21} & D_{K22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}\end{aligned}$$



Representación resultante (I)

Siendo $R := I - \begin{pmatrix} 0 & D_{G22} \\ D_{K11} & 0 \end{pmatrix}$, si es invertible (bucle **bien planteado**) se tiene:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_{G2} & 0 \\ 0 & C_{K1} \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \underbrace{R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_{G21} & 0 \\ 0 & D_{K12} \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

que particionando S y T adecuadamente, escribimos como:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{p1} & S_{p2} \\ S_{q1} & S_{q2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{p1} & T_{p2} \\ T_{q1} & T_{q2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



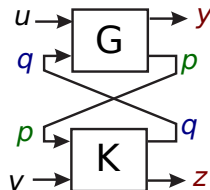
Representación resultante (II)

En forma normalizada, eliminando p y q , tenemos la ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_G + B_{G2}S_{q1} & B_{G2}S_{q2} \\ B_{k1}S_{p1} & A_K + B_{k1}S_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{G1} + B_{G2}T_{q1} & B_{G2}T_{q2} \\ B_{k1}T_{p1} & B_{K2} + B_{k1}T_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

y de salida:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{G1} + D_{G12}S_{q1} & D_{G12}S_{q2} \\ D_{K21}S_{p1} & C_{K2} + D_{K21}S_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{G11} + D_{G12}T_{p1} & D_{G12}T_{p2} \\ D_{K21}T_{p1} & D_{K22} + D_{K21}T_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



Estabilidad interna

- La interconexión es **internamente estable** si la matriz

$$A_{BC} = \begin{pmatrix} A_G + B_{G2}S_{q1} & B_{G2}S_{q2} \\ B_{k1}S_{p1} & A_K + B_{k1}S_{p2} \end{pmatrix}$$

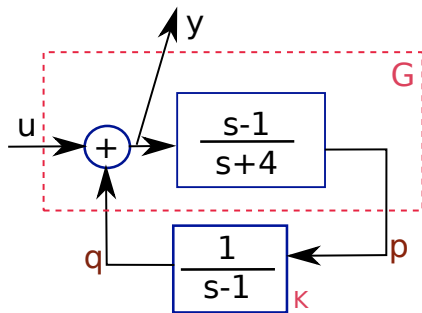
tiene todos sus polos estables (en caso contínuo, parte real negativa).

* Las cancelaciones polo-cero inestables en la interconexión podrían dar lugar a una matriz de transferencia entre las entradas (u, v) y las salidas (y, z) estable, pero habría variables *internas* tendiendo a infinito si las condiciones iniciales no fueran “exactamente cero”.



Ejemplo

El siguiente bucle tiene una función de transferencia de $u(s)$ a $y(s)$ estable, pero NO es internamente estable:



$$\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{s-1}{s+4} & \frac{s-1}{s+4} \end{pmatrix}}_G \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo en **MATLAB**...

Conclusiones

- La manipulación de la interconexión en representación interna “conserva” los estados “físicos” de G y K .
- Estabilidad interna implica que **todas** las variables que almacenan energía en **ambos** sistemas permanecen acotadas ante entradas y condiciones iniciales acotadas.
- Todos los sistemas de control que se implementen en aplicaciones deben ser internamente estables!

Estabilidad interna: ejemplo cancelación polo-cero inestable

CC-BY, 2018, Antonio Sala Piqueras. Este código ha sido ejecutado sin errores en Matlab R2018a.

Presentación en vídeo en: <https://youtu.be/V7MsnG6E0rM>

Modelado en FdT (matriz de transferencia)

```
s=tf('s');
G= [ 1 1; ...
     (s-1)/(s+4)*[1 1] ] ;
G.InputName={'u','q'};
G.OutputName={'y','p'}
```

```
G =

From input "u" to output...
y: 1

      s - 1
p:  -----
      s + 4

From input "q" to output...
y: 1

      s - 1
p:  -----
      s + 4
```

Continuous-time transfer function.

```
K=1/(s-1);
```

Paso a representación interna de los sistemas a interconectar

```
Gss=ss(G)
```

```
Gss =

A =
      x1
x1   -4

B =
           u       q
x1   -1.25   -1.25

C =
      x1
y      0
p      4

D =
           u       q
y      1       1
p      1       1
```

Continuous-time state-space model.

```
Kss=ss (K)
```

```
Kss =
```

```
A =  
      x1  
x1    1
```

```
B =  
      u1  
x1    1
```

```
C =  
      x1  
y1    1
```

```
D =  
      u1  
y1    0
```

Continuous-time state-space model.

Interconexión de los mismos

Conectamos la salida 2 de Gss (p) a la entrada de Kss, la salida de Kss a la entrada 2 de Gss (q).

```
BCss=lft (Gss,Kss)
```

```
BCss =
```

```
A =  
      x1    x2  
x1    -4   -1.25  
x2     4     2
```

```
B =  
      u  
x1   -1.25  
x2     1
```

```
C =  
      x1    x2  
y     0     1
```

```
D =  
      u  
y     1
```

Continuous-time state-space model.

Pasamos a función de transferencia $C(sI - A)^{-1}B + D$, y obtengamos polos y ceros:

```
BCpolosceros=zpk (BCss)
```

```
BCpolosceros =
```

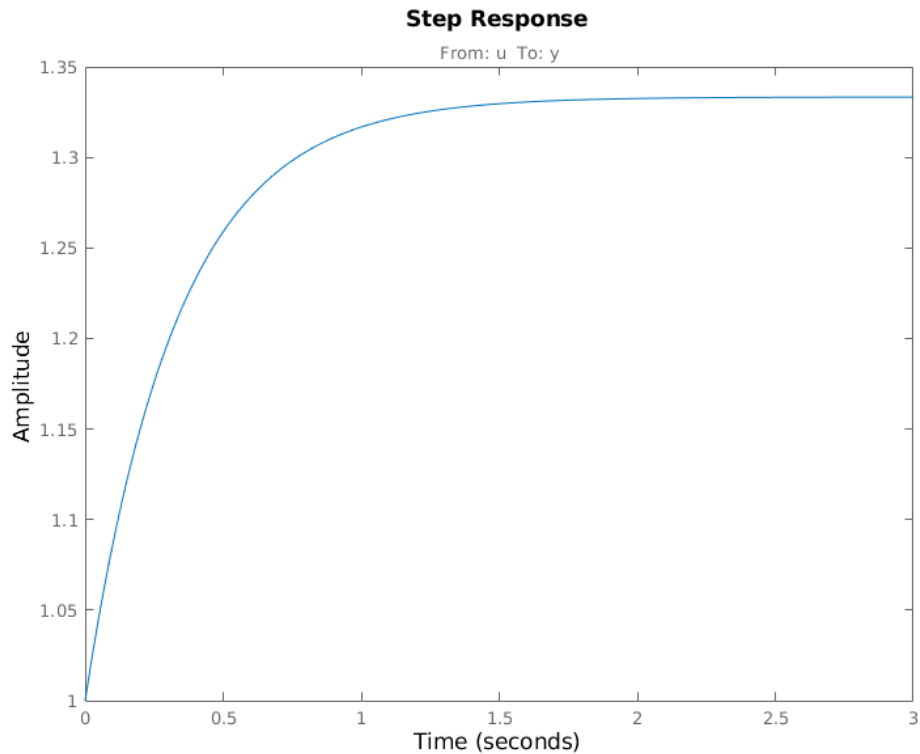
```
From input "u" to output "y":  
(s-1) (s+4)  
-----  
(s+3) (s-1)
```

Continuous-time zero/pole/gain model.

Estabilidad entrada-salida entre "u" e "y":

La respuesta entrada-salida es estable:

```
step(BCss)
```



Simplificando la función de transferencia, tenemos:

```
minreal(BCpolosceros)
```

```
ans =
```

From input "u" to output "y":

$$\frac{(s+4)}{(s+3)}$$

$$(s+3)$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

Estabilidad interna:

El sistema NO es internamente estable:

```
eig(BCss.A)
```

```
ans = 2x1
```

```
-3
```

```
1
```

Existen variables "internas" (el estado de K) que tienden a infinito si las cond. iniciales son no nulas. Esta interconexión nunca funcionaría en la práctica.

```
rank(ctrb(BCss))
```

```
ans = 1
```

```
rank(observ(BCss))
```

```
ans = 2
```