

# Procesos estocásticos: definición y ejemplos

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Video presentación en: <http://personales.upv.es/asala/YT/V/estoc1.html>



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

# Presentación

## Motivación:

Las señales temporales con “ruido” son de gran importancia en control y procesamiento de señal. El valor de la salida en cada “instante” es una variable aleatoria.

## Objetivos:

Comprender el concepto de proceso estocástico que formaliza la idea de “señal con ruido” y las formas de abordar su estudio.

## Contenidos:

Definición. Ejemplos. Enfoque de estudio. Conclusiones.



# Concepto de proceso estocástico

Un “proceso estocástico”  $\mathcal{X}$  es un conjunto de variables aleatorias que toman valores en un mismo espacio muestral  $\Omega$ ; existe una vble. aleatoria para cada elemento de un conjunto “índice” o dominio,  $T$ .

Se puede entender como una “función aleatoria” de  $T$  a  $\Omega$ .

Cuanto  $T$  es el “tiempo”, es la formalización de las señales, p. ej. ,salidas de los “procesos a controlar”, que contienen ruido.

Notación:

$$\mathcal{X} := \{X(t), t \in T\}, \quad X(t) \in \Omega$$



## Ejemplos:

- Señal discreta con ruido  $T \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$  (tiempo discreto, muestras),  $\Omega = \mathbb{R}$ .
- Señal continua con ruido  $T \equiv \mathbb{R}$  (tiempo),  $\Omega = \mathbb{R}$
- Señal aleatoria multivariable  $T \equiv \mathbb{R}$  (tiempo),  $\Omega = \mathbb{R}^m$
- Ruido en una imagen fotográfica de  $2000 \times 1000$  pixels:  
 $T \equiv \{1, \dots, 2000\} \times \{1, \dots, 1000\}$  (índice espacial bidimensional), muestras en  $\Omega = \mathbb{R}$  (B/N) o  $\mathbb{R}^3$  (3 colores RGB).
- Ruido en un registro de video 20fps RGB:  
 $T \equiv \{0, 1/20, 2/20, \dots\} \times \{1, \dots, 2000\} \times \{1, \dots, 1000\}$  (tiempo  $\times$  índice espacial bidimensional),  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .
- Vibración vertical aleatoria en una viga:  $T \equiv \mathbb{R} \times [0, L]$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$ .

# Objetivos del análisis de procesos estocásticos

Entre la “**aleatoriedad total**” (ruido blanco,  $X(t_1)$  estadísticamente indep. de  $X(t_2)$  si  $t_1 \neq t_2$ ), y el “**determinismo**” ( $X(t) = \sin(t)$ ) hay muchos grados intermedios.

El objetivo de análisis es definir las relaciones (dependencia, covarianza, correlación) entre las variables en distintos valores de  $t$  (instantes de tiempo, píxeles de imagen, ...).

## Aplicaciones:

- Filtrado/suavizado de señales, eliminación ruido en control, audio, video.
- Predicción: conocidos los valores en determinados instantes “pasados”, dar una predicción de los valores en instantes “futuros”
- Interpolación: predecir valores “intermedios” ( $t$  tiene significado espacial).
- Control estadístico: si existen entradas deterministas que cambian medias/varianzas/correlación, para conseguir determinados objetivos.

# Enfoques de estudio

## Enfoque “descriptivo”:

- Definir la media  $\mu(t) := E[X(t)]$ , varianza  $\Sigma_t := E((X(t) - \mu(t))^2)$ , covarianza  $R(t_1, t_2) := E((X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2)))$
- Calcularlas basadas en datos (muestras, ejemplos).
- Usarlas para hacer predicciones de unas variables en función de otras. P. ej. si  $T$  es tiempo, predecir valores “futuros” en función de “pasados”.

## Enfoque “físico”:

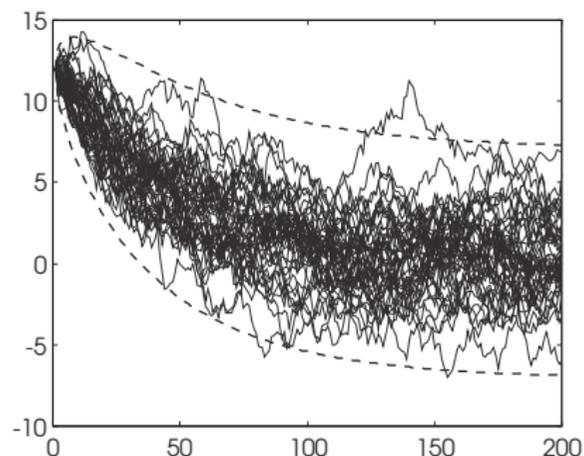
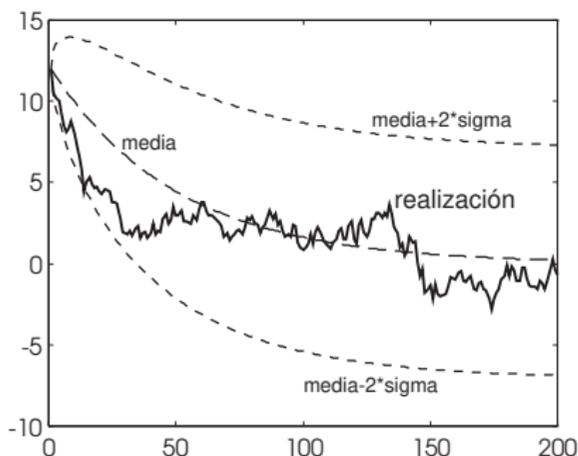
- Suponer que existe determinado sistema dinámico sujeto a entradas aleatorias que es la “causa” de la correlación en distintos instantes de tiempo, y determinar las propiedades de la “integral” de esa dinámica.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \quad dx = Adt + BdW$$



# Ejemplo

Descargas de un condensador desde 12V de cond. inicial:



Media, vza. y desv. típica dependen del tiempo. Se pueden calcular por “repetición del experimento”, basándose en *datos*, o mediante *integración* de las ecuaciones físicas de una red RC (en su versión *estocástica*).



# Conclusiones

- Los conceptos de ruido de proceso, de medida, en señales temporales para control, audio, video, o en señales multidimensionales (imágenes) se formalizan como procesos estocásticos (funciones aleatorias): conjunto de variables aleatorias función de un conjunto índice que significa tiempo (control) espacio (foto), ambas (video, control de sistemas en EDP).
- La utilidad práctica necesita calcular medias, varianzas, correlaciones entre distintos instantes temporales/posiciones espaciales para hacer predicciones, filtrados, eliminación de ruido, etc.
- Se pueden hacer cálculos basados en datos [identificación, aprendizaje, interpolación] o basados en modelos [ecuaciones diferenciales (cont.) o en diferencias (discr.) estocásticas].