Señales aleatorias: procesos estocásticos en el tiempo

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**estoct**.html

Presentación

Motivación:

Los procesos estocásticos definen el "ruido" dependiente del tiempo o espacio. En problemas de control usuales, las señales son funciones del tiempo.

Objetivos:

Comprender las definiciones básicas de un proceso estocástico que evoluciona en el tiempo.

Contenidos:

Definición. Respuesta temporal: media, varianza, covarianza. Conclusiones.

Concepto de proceso estocástico

Un "proceso estocástico" $\mathcal{X}$ es un conjunto de variables aleatorias que toman valores en un mismo espacio muestral Ω, una para cada elemento de un conjunto "índice" o dominio, T.

Se puede entender como una "función aleatoria" de T a Ω.

Notación:

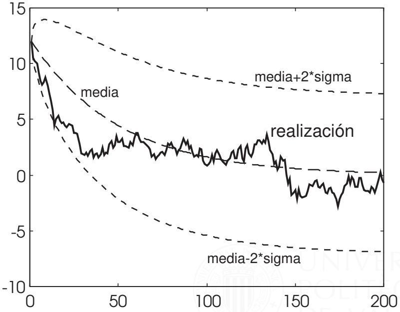
$$\mathcal{X} := \{X(t), t \in T\}, \quad X(t) \in \Omega$$

Procesos estocásticos temporales

Supondremos $T \equiv \mathbb{R}$ o $T \equiv \mathbb{Z}$, y lo consideraremos "tiempo" (cont. o discr.).

- Señal discreta con ruido $T \equiv \{0, 1, 2, \ldots\}$(muestras), $\Omega = \mathbb{R}$.
- Señal contínua con ruido $T \equiv \mathbb{R}$ (tiempo), $\Omega = \mathbb{R}$

Denominaremos "**realización**" del proceso a una **trayectoria** de un experimento (muestra) concreto.



Parámetros de Respuesta temporal

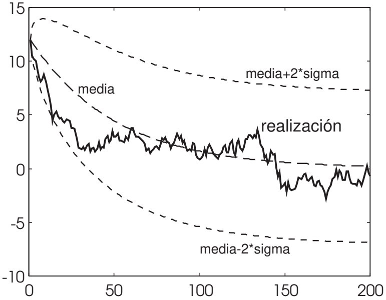
Como para cada t, la respuesta es "incierta", se pueden definir:

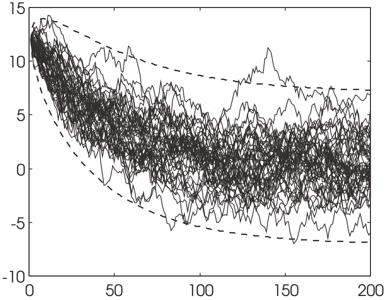
- Densidad marginal en cada instante $f_t(x)$.
- media $\mu(t) := E[X(t)] = \int_\Omega x f_t(x)\, dx$,
- varianza $\Sigma(t) := E((X(t) - \mu(t))^2)$, desv. típ. $\sigma(t) = \sqrt{\Sigma(t)}$

La media y varianza son, entonces, funciones del tiempo.

Ejemplo

Descargas de un condensador desde 12V de cond. inicial:





El proceso nunca llega al "equilibrio" (todas las realizaciones –izq.– cambian sin cesar), pero su media sí, en 150 segundos... necesario generalizar el concepto de equilibrio.

Interacción entre variables en el tiempo

- Densidad “conjunta” en varios instantes $f_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$
- covarianza $R(t_1, t_2) := E((X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))) = \int_\Omega \int_\Omega (x_1 - \mu(t_1))(x_2 - \mu(t_2)) f_{t_1,t_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$ Obviamente $\Sigma(t) = R(t, t)$.
- correlación $\rho(t_1, t_2) := \frac{R(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$

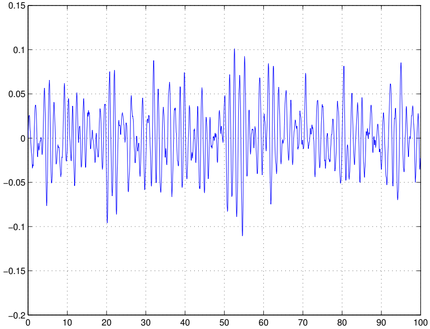
Ejemplo condensador: la realización es “continua”, existe cierta “correlación estadística” entre la variable en un instante y en sus vecinos temporales, $\lim_{t_2 \to t_1} \rho(t_1, t_2) = 1$ en señales de ancho de banda finito.

Caso multivariable $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$: Sustituir X^2 por XX^T, etc. La varianza se convierte en matriz $n \times n$. La covarianza entre 2 instantes de tiempo también es matriz $n \times n$. Los elementos de diagonal de $R(t_1, t_2)_{n\times n}$ se denomina **autocovarianza** (de cada señal consigo misma retrasada).

Complicado de manejar (cuatro índices: correlación entre $x_1(t_1 = 7)$ con $x_3(t_2 = 11)$)... ¿Matriz de transferencia? ¿Repr. interna? (descripción mínima de toda esta estructura de covarianza)

Ejemplo (2)

Registro de vibración de un sistema lineal, ante fuerzas no conocidas.



No se aprecia diferencia de comportamiento en instantes iniciales vs. finales, se aprecia correlación entre variables en distintos instantes, esto es, una cierta "oscilación" de algo más de 1 segundo de período. Necesario generalizar el concepto de "respuesta/contenido en frecuencia".

Objetivos del análisis estadístico de señales con ruido

El análisis estadístico de señal (statistical signal processing) persigue:

- determinar un modelo subyacente que pudiera explicar un mecanismo físico de cómo han sido generadas (identificación), y la sensibilidad de los parámetros del modelo al ruido.
- predecir su valor ($\pm$ interv. confianza) en instantes futuros (extrapolación: inversión económica, control predictivo),
- Extraer una "señal" (posiblemente determinista o con algún tipo de suposición sobre el mecanismo que la genera) filtrando el "ruido": problemas de filtrado o suavizado (causal, para operación en tiempo real; no causal, con datos almacenados previamente), problemas de interpolación (muestras faltantes).

Conclusiones

- Los conceptos de ruido de proceso, de medida, en señales temporales para control, se formalizan como procesos estocásticos (funciones aleatorias) en el tiempo.
- Las aplicaciones necesitan calcular medias, varianzas y correlaciones entre distintos instantes; estos parámetros son funciones del tiempo.
- Necesario precisar el concepto de condiciones iniciales, equilibrio, etc.
- Aplicaciones en toma de decisiones, filtrado, control, interpolación.