

# Procesos estacionarios ergódicos

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ergod.html>



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

# Presentación

## Motivación:

Los procesos estocásticos definen el “ruido” dependiente del tiempo o espacio. En problemas de control usuales, las señales son funciones del tiempo. Las señales aleatorias nunca llegan al “equilibrio”, debe redefinirse el concepto.

## Objetivos:

Comprender el significado de estacionariedad (“equilibrio”) más “ergodicidad” (da igual repetir el experimento que recoger más datos).

## Contenidos:

Revisión de definiciones básicas. Procesos estacionarios. Procesos ergódicos.  
Conclusiones.



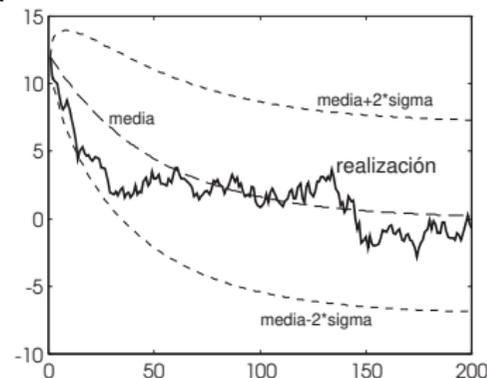
# Procesos estocásticos temporales

Conjunto de vbles aleatorias  $\mathcal{X} := \{X(t), t \in T\}$ ,  $X(t) \in \Omega$ , o “función aleatoria” de  $T$  a  $\Omega$ .

- Señal discreta con ruido:  $T \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$ .
- Señal continua con ruido:  $T \equiv \mathbb{R}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}$

**Realización:** una **trayectoria** de un experimento concreto.

**Análisis “finito”:** Seleccionando un número finito de instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ( $n$  fijado),  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  forma un vector  $n$ -dimensional de variables aleatorias al que se le podría aplicar el análisis multivariante usual (densidad conjunta, marginal, condicional, varianza, covarianza, correlación, predicción, ...).



# Procesos estacionarios

Es una generalización del concepto de equilibrio (valor determinista constante) a “función de densidad (conjunta) constante”:

► Un proceso estocástico es “**estacionario en sentido estricto**” si, para todo conjunto finito de instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , con  $n$  arbitrario, la función de densidad conjunta no cambia con un desplazamiento temporal  $\tau \in \mathbb{R}$ :

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau}(x_1, \dots, x_n)$$

► WSS (sentido amplio): media y varianza constante. Covarianza  $R(t_1, t_2) = R(0, t_2 - t_1)$  sólo depende de distancia temporal.



# Procesos estacionarios ergódicos

Un proceso estacionario es **ergódico** si sus propiedades estadísticas pueden ser determinadas por una **única** realización suficientemente (infinitamente) larga del mismo.

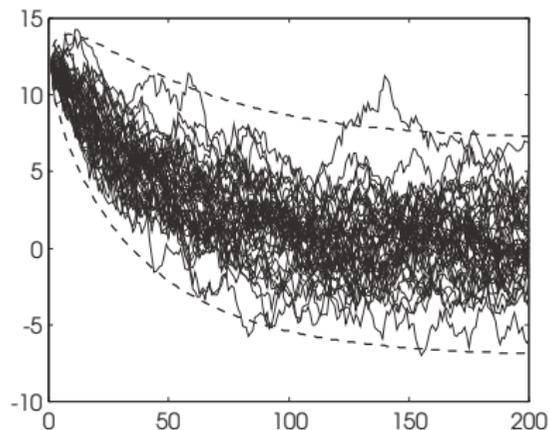
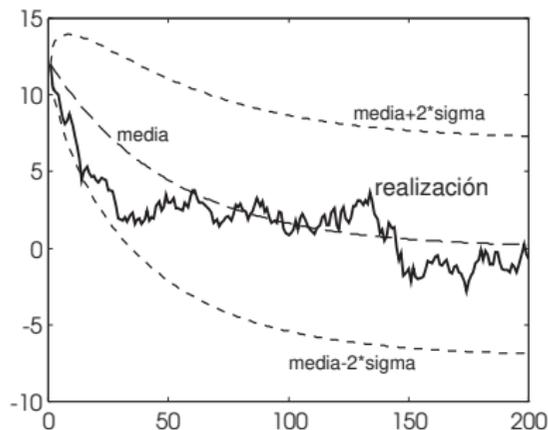
**Ergódico:**  $\Leftrightarrow$  **Repetir** el experimento “ $r$ ” veces y promediar sobre las  $r$  realizaciones obtiene el mismo resultado que **prolongarlo** y promediar sobre el tiempo.

Formalmente, cuando  $r$  tiende a infinito y la duración de la prolongación también.

Teoría complicada... [https://en.wikipedia.org/wiki/Ergodic\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Ergodic_theory) relacionada con que no existan conjuntos invariantes de probabilidad no cero aparte del espacio de estados completo.



# Ejemplo (1)



El proceso alcanza el estado “estacionario” en aproximadamente 150 segundos. La teoría de procesos estacionarios aplicaría para comprender las características de la señal a partir de  $t = 150$ . Si todo lo que subyace es lineal excitado por ruido de distrib. constante, será ergódico y prolongando desde 150 a 15000 el experimento izquierdo obtendremos la misma información que con las repeticiones de la derecha.

# Procesos NO ergódicos

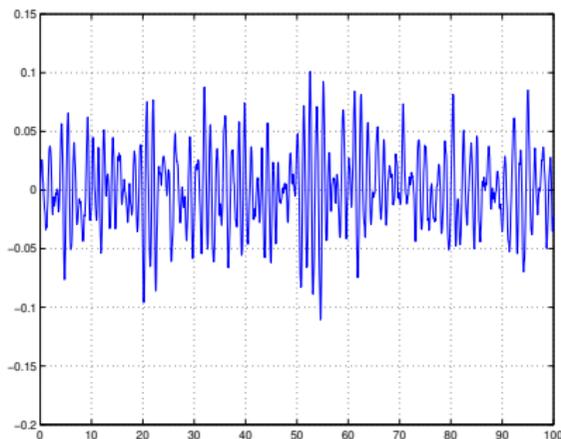
Ejemplo procesos **NO** ergódicos:

- Proceso inestable lineal, excitado con ruido media cero: la media “formal” es cero, pero la media de las muestras experimentales diverge.
- Proceso no lineal con dos puntos de equilibrio estables. Dependiendo de la “suerte”, el sistema acabará en uno o en otro con una cierta probabilidad, pero la media a largo plazo de UNA muestra sólo estará en uno de los equilibrios.
- Con ruido, varios “puntos de equilibrio” se cambia la definición a más de un “atractor/conjunto de estados absorbentes/cojunto invariante” (que si las trayectorias “entran” en dicho conjunto no vuelven a salir).

**Condiciones “informales” de ergodicidad:** estacionario + asintóticamente estable + sin varios subconjuntos de estados “absorbentes” (un único equilibrio) + invariante en el tiempo... básicamente, el comportamiento ante entradas “ruido blanco” de un sistema lineal LTI exponencialmente estable alrededor de cero es “ergódico”.

## Ejemplo (2)

Registro de vibración:



Parece régimen estacionario (no se aprecia diferencia de comportamiento en instantes iniciales vs. finales), ergódico si sabemos que es un único pto. equilibrio de sist. lineal.



# Conclusiones

- El ruido en señales temporales para control se formaliza como procesos estocásticos (funciones aleatorias) en el tiempo. Las aplicaciones necesitan calcular medias, varianzas y correlaciones entre distintos instantes; estos parámetros son funciones del tiempo.
- El concepto de “**equilibrio**” debe cambiarse a “**estacionario**”, de modo que **medias y varianzas son constantes** en el tiempo, y que la **correlación** sólo dependa de la **distancia temporal**.
- Un proceso estacionario es **ergódico** si se pueden extraer las características estadísticas del mismo mediante la observación del mismo durante “**mucho rato**” (sin “reiniciar todo el experimento”).
- Los sistemas lineales estables invariantes en el tiempo sometidos a entradas “ruido blanco” de distrib. normal durante mucho rato son estacionarios y ergódicos.

