

Valores propios generalizados

Antonio Sala Piqueras

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)
Universitat Politècnica de València (UPV)

Presentación

Motivación:

El problema de valores propios $\text{eig}(A)$, $Av = \lambda v$ puede generalizarse a $Av = \lambda Bv$.

Objetivos:

Comprender la definición del problema y alguna de sus aplicaciones.

Contenidos:

Definición de valor propio generalizado. Aplicaciones. Casos particulares.
Conclusiones.

Valor propio generalizado

Problema de valor propio generalizado $\text{eig}(A,B)$: calcular soluciones de

$$Av = \lambda Bv \quad \det(\lambda B - A) = 0$$

Entonces, si V son todas las soluciones para v (vectores propios generalizados) y D la matriz diagonal con cada λ (valor propio generalizado) en el mismo orden que v :

$$A \cdot V = B \cdot V \cdot D$$

El par (A, B) , generando el “linear matrix pencil” $A - \lambda B$, es **regular** si $\det(\lambda B - A)$ **no** es el polinomio en λ “idénticamente **cero**” $\Leftrightarrow$ existe un número **finito** de valores propios generalizados.

Ejemplo: $[1 \ 0; 0 \ 0] - \lambda [1 \ 0; 0 \ 0]$ no es regular.

Aplicaciones (1): estabilidad de sistemas algebraico-diferenciales lineales

Si un sistema viene dado por ecuaciones algebraico-diferenciales $f(\dot{x}, x) = 0$ genérico, en el caso lineal $P\dot{x} + Ax = 0$ podemos escribir la forma normalizada “descriptor” con $E = -P$:

$$E\dot{x} = Ax$$

Haciendo transf. Laplace, $E \cdot sx(s) - x(0) = A \cdot x(s)$,

$$x(s) = (Es - A)^{-1}x(0)$$

Los polos del sistema son los valores propios generalizados del par (A, E) , suponiendo que es regular (si no, no tiene sentido “físico”).

Aplicaciones (2): formas cuadráticas

Considérese el problema de maximizar o minimizar (“Rayleigh quotient”):

$$R(v) := \frac{v^T A v}{v^T B v}$$

Entonces, su derivada es:

$$\frac{d}{dv} R(v) = \frac{2Av(v^T Bv) - 2Bv(v^T Av)}{(v^T Bv)^2} = \frac{2}{v^T Bv} \cdot (Av - \frac{v^T Av}{v^T Bv} Bv)$$

Igualando a cero, obtenemos que los máximos/mínimos/silla del problema verifican $Av = \lambda Bv$, $R(v) = \lambda$.

Optimización con restricciones: maximizar $v^T Av$ sujeto a $v^T Bv = 1$ con A, B simétricas implica maximizar $L := v^T Av + \lambda(v^T Bv - 1)$.

Derivando respecto a v obtenemos $0 = 2Av - 2\lambda Bv = 2(A - \lambda B)v$.

Casos particulares

- ① Si $B = I$, entonces es el problema de valor propio clásico $Av = \lambda v$, y diagonalización $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$.

- ② Si B es **invertible**, entonces puede reducirse a un problema convencional:

$$Av = \lambda Bv \quad \Rightarrow \quad \overbrace{(B^{-1}A)} v = \lambda v$$

Corolario (Sistemas dinámicos): si E es invertible, la dinámica de $E\dot{x} = Ax$ es la misma que la del sistema $\dot{x} = (E^{-1}A)x$ en representación interna normalizada.

- ③ Si A y B son **simétricas** y B es **invertible**, entonces B tiene “raíz cuadrada” $B = QQ^T$ con Q invertible. Entonces,

$$\det(\lambda B - A) = \det(\lambda QQ^T - A) = \det(Q \cdot \overbrace{(\lambda I - Q^{-1}AQ^{-T})}^{\text{simétrica}} \cdot Q^T)$$

$\Rightarrow$ Con A, B simétricas, los valores propios $\text{eig}(A, B)$ son los ordinarios de la matriz simétrica $Q^{-1}AQ^{-T}$ [$B^{-1}A$ no tenía por qué ser simétrica]. Importante en **geometría y estadística**.

Conclusiones

- El problema de valor propio generalizado obtiene autovalores y autovectores verificando $Av = \lambda Bv$.
- Tiene una interpretación geométrica (cociente de cuadráticas)
- Tiene una interpretación dinámica (sistemas lineales que no están en representación interna).
- Algunos casos particulares se reducen a problemas de valor propio convencional con un cambio de variable.