Linealización (1 variable)

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

Vídeo presentación en https://youtu.be/DA696t1E2oU

Motivación y objetivos

Motivación:

- Aproximar una función no-lineal (curva) por una lineal (recta) permite su manejo posterior (resolución de ecuaciones albegraicas o diferenciales) más sencillo.

Objetivo:

- Comprender los conceptos subyacentes y saber cómo calcularla en casos de una variable.

Contenido:

- Funciones lineales. Linealización (1 variable) como recta tangente. Ejemplos. Discusión y conclusiones.

Funciones lineales de 1 variable

- Formalmente $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es lineal si $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ para todo x_1, x_2, α_1 y α_2.
- Geométricamente, recta que pasa por el **origen**: $f(0) = f(0x) = 0 \cdot f(x) = 0$.
- Computacionalmente, $y = \kappa x$, ecuación de **proporcionalidad**.

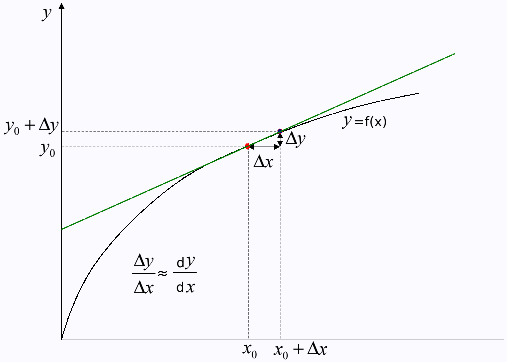
  Las computaciones con ecuaciones lineales (proporcionalidades) son más sencillas que en el caso no-lineal:
  - resolver $4 = f(x)$ con $f(x) = 2x$ es más fácil que con $f(x) = 3 - 2x^2 + 6x^3 - sin(x/12)$.

Linealización: recta tangente

Idea básica: aproximar curva $y = f(x)$ por **recta tangente** en un punto (x_0, y_0), con $y_0 = f(x_0)$.

Elección de $(x_0, f(x_0))$ dependiente de la aplicación.

- Alrededor del punto de tangencia, curva y recta dan resultado "parecido".



La pendiente de la recta tangente es la derivada en x_0:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0) de pendiente $m := \frac{df}{dx}(x_0)$:

$$(y - y_0) = m \cdot (x - x_0)$$

Ecuación **lineal** de **proporcionalidad** en **incrementos**: $\Delta y = m\Delta x$

Ejemplo numérico

Consideremos $y = f(x) := \sqrt{16 + x^2}$.
Deseamos aproximarla alrededor del punto $x_0 := 3$, $y_0 = \sqrt{16 + 3^2} = 5$.

La derivada en cualquier punto es: $\frac{df}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}$.
La pendiente en 3 es: $m = \frac{df}{dx}(3) = \frac{6}{2\sqrt{16+3^2}} = 0.6$
La aproximación lineal en coordenadas "incrementales" es:
$(y_{lin} - 5) = \Delta y = 0.6\Delta x = 0.6(x - 3)$
En coordenadas "absolutas" es la expresión (afín):
$y_{lin} = 5 + 0.6(x - 3) = 3.2 + 0.6x$.

x	$y = f(x)$	Δx	$\Delta y = 0.6\Delta x$	$y_{lin} = 3.2 + 0.6x$	$y - y_{lin}$	error(%) $\frac{y-y_{lin}}{y_{lin}-5}$
3	5	0	0	5	0	–
3.1	5.0606	0.1	0.06	5.06	0.0006	1%
2.7	4.8260	-0.3	-0.18	4.82	0.006	3.3%
0.5	4.031	-2.5	-1.5	3.5	0.5311	35%

Conclusiones

- Aproximar a una función por una recta (que, en incrementos, pasa por el origen) facilita muchos cálculos, que se reducen a simples proporcionalidades.
- Idea básica: recta tangente en un cierto "punto de linealización".
  - Fórmula final: $\Delta y \approx (derivada\_en\_pto\_lin) * \Delta x$.
- El punto de linealización depende de la aplicación concreta.