Linealización (1 variable): serie de Taylor, discusión...

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

Vídeo presentación en https://youtu.be/iZeVlb3ffzI

Motivación y objetivos

Motivación:

- Aproximar una función no-lineal (curva) por una lineal (recta) permite su manejo posterior (resolución de ecuaciones albegraicas o diferenciales) más sencillo.

Objetivo:

- Comprender la linealización por serie de Taylor y diferenciarla de otras acotaciones/aproximaciones por rectas en aplicaciones.

Contenido:

- Funciones lineales. Linealización (serie de Taylor). Ejemplos. Discusión y conclusiones.

Funciones lineales de 1 variable

- Formalmente $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es lineal si
  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ para todo x_1, x_2, α_1 y α_2.

- Geométricamente, recta que pasa por el **origen**:
  $f(0) = f(0x) = 0 \cdot f(x) = 0$.

- Computacionalmente, $y = \kappa x$, ecuación de **proporcionalidad**.
- Aproximación lineal: recta tangente. Existe interpretación alternativa, que permite aproximaciones de mayor grado.

Interpretación serie de Taylor

Una función suave puede expresarse alrededor de x_0 como:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)\cdot(x - x_0)^3 + \dots$$

- Los dos primeros términos dan la aproximación por recta tangente

$$\Delta f := f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot(x - x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

- Los tres primeros, la aproximación por parábola tangente

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2$$

- etc... *aproximación polinomio de un cierto grado alrededor de un punto.*

Linealización $\Leftrightarrow$ selección de términos hasta grado 1 de la serie de Taylor y paso a coordenadas incrementales.

Ejemplo numérico

Consideremos $y = f(x) := \sqrt{16 + x^2}$.
Deseamos aproximarla alrededor del punto

$$x_0 := 3, \quad y_0 = f(3) = \sqrt{16 + 3^2} = 5$$

La derivada en cualquier punto es: $\frac{df}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}$.
La pendiente en 3 es: $m = \frac{df}{dx}(3) = \frac{6}{2\sqrt{16+3^2}} = 0.6$
La serie de Taylor hasta grado 1 es

$$f(x) \approx f(3) + 0.6(x - 3)$$

La aproximación lineal en coordenadas “incrementales” es:

$$(y_{lin} - 5) = \Delta y = 0.6\Delta x = 0.6(x - 3)$$

Más ejemplos

- Consideremos $y = \sin(x)$, con $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$.
  - Alrededor de $x = 0$, $\Delta y \approx \cos(0)\Delta x$, esto es
  $$\Delta y \approx 1 \cdot \Delta x, \qquad \Leftrightarrow \qquad sin(x) \approx x$$
  - Alrededor de $x = \pi$, $\Delta y \approx \cos(\pi)\Delta x$, esto es
  $$\Delta y \approx -1 \cdot \Delta x \qquad \Leftrightarrow \qquad sin(x) \approx sin(\pi) + (-1)(x - \pi) = \pi - x$$
  - Alrededor de $x = pi/2$, $\Delta y \approx \cos(\pi/2)\Delta x$, esto es
  $$\Delta y \approx 0 \cdot \Delta x \qquad \Leftrightarrow \qquad sin(x) \approx sin(\pi/2) + (0)(x - \pi/2) = 1 + 0 \cdot x$$

  *En los máximos y mínimos, la linealización es nula: derivada cero.

***Nota:** las expresiones en rojo corresponden a la expresión **lineal** (coordenadas incrementales, recta que pasa por el origen: $\Delta y = 0$ si $\Delta x = 0$); las expresiones en azul corresponden a la expresión **afín** de la recta tangente en coordenadas absolutas (originales).

Aplicación: resolución de ecuaciones no lineales

Resolver numéricamente $f(x) = 0$. Se dispone de un estimado x_0 "cercano" a la solución.

$$0 = f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) * (x - x_0)$$

Igualando a 0 la linealización y despejando sale $\Delta x = -\left(\frac{df}{dx}(x_0)\right)^{-1} f(x_0)$:

$$x \approx x_0 + \Delta x = x_0 - \left(\frac{df}{dx}(x_0)\right)^{-1} f(x_0)$$

que se conoce como **método de Newton**, si se repite iterativamente.

```
f=@(x) sqrt(16+x^2); dfdx=@(x) x/sqrt(16+x^2);

%solucionamos f(x)=6, sabiendo que f(3)=5, o sea f(x)-6=0
solprueba=3;%inicio
for i=1:4
    solnueva=solprueba-inv(dfdx(solprueba))*(f(solprueba)-6)
    solprueba=solnueva;
end
%comprobamos que efectivamente resulta 6:
f(solprueba)
```

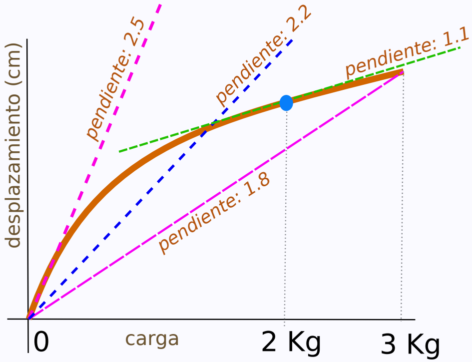
Cosas “parecidas” que NO son linealización

- Recta de regresión lineal, acotación por funciones lineales...

Ejemplo: muelle no lineal (rigidez aumenta con la carga, curva marrón): $l(F) = l_{nat} + \sigma(F) \cdot F$

- *Acotación*: para cargas entre 0 y 3 Kg, el alargamiento está entre 1.8 y 2.5 cm/Kg.
- *Mínimos cuadrados:* en un experimento con cargas aleatorias (dist. uniforme) entre 0 y 3 Kg, el alargamiento medio fue de 2.2 cm/Kg.
- *Linealización:* (a) para cargas **pequeñas**, el alargamiento es de 2.5 cm/Kg (**incremento** sobre long. natural);

  (b) para cargas de alrededor de **2 Kg**, un **incremento** de carga pequeño produce un **incremento** de longitud de 1.1 cm/Kg (incremento sobre long. cargado con 2 Kg).



Conclusiones

- Aproximar a una función por una recta (que, en incrementos, pasa por el origen) facilita muchos cálculos, que se reducen a proporcionalidades.
- Idea básica: recta tangente / serie de Taylor en un cierto "punto de linealización".
  - Fórmula final: $\Delta y \approx (derivada\_en\_pto\_lin) * \Delta x$.
- El punto de linealización depende de la aplicación concreta (o puede ir cambiando, como en la resolución de ecuaciones).
  - No confundir con regresión/acotación.