Control Robusto: Sensibilidad mixta

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo del contenido en:
http://personales.upv.es/asala/YT/V/mxs1.html, http://personales.upv.es/asala/YT/V/mxs2.html, http://personales.upv.es/asala/YT/V/mxsd1.html, http://personales.upv.es/asala/YT/V/mxsd2.html, http://personales.upv.es/asala/YT/V/mxsd3.html

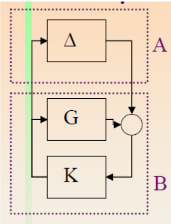
Introducción

Motivación:
Los problemas de planta generalizada son muy generales, pero gran cantidad de problemas de control consideran el bucle estandard de 1 grado de libertad $u = K(s)e$.

Objetivos:
Comprender una metodología sencilla para diseñar controladores robustos en ese caso particular.

Contenidos:
Fórmula de incertidumbre aditiva y multiplicativa (peq. ganancia). El bucle de 1 grado de libertad. Técnica "Sensibilidad Mixta".

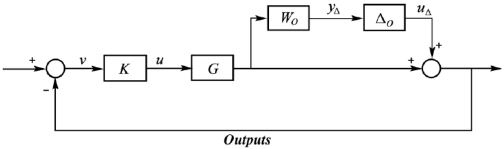
Teorema pequeña ganancia: error aditivo



Modelo $G(s)$, regulador $K(s)$; $G_{real} = G(s) + \Delta_{[+]}$.
B es un sistema LTI con MdT
$B(s) = -(I + K(s)G(s))^{-1}K(s)$.

- El bucle **real** será estable si el nominal $B(s)$ lo es, y
$$\boxed{\|\Delta_{[+]}\|_\infty \leq 1/\|(I + K(s)G(s))^{-1}K(s)\|_\infty}$$
- si $\Delta_{[+]}$ es Lineal (LTI): El bucle **real** será estable si el nominal $B(s)$ lo es, y $\boxed{\bar\sigma(\Delta_{[+]}(j\omega)) \leq 1/\bar\sigma\left((I + K(j\omega)G(j\omega))^{-1}K(j\omega)\right)}$

Incertidumbre multiplicativa SALIDA



$$y_m = Gu$$
$$y_{real} = (I + \Delta_o \cdot W(s))y_m$$
$$\|\Delta_o\|_\infty \leq 1$$

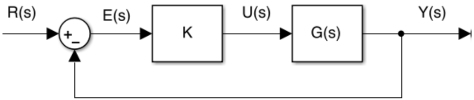
$$y_m = -GKy_{real} = -GK(y_m + u_\Delta) \qquad y_m = -(I + GK)^{-1}GKu_\Delta$$

$$y_\Delta = \underbrace{-W(I + GK)^{-1}GK}_{B}\, u_\Delta, \qquad u_\Delta = \underbrace{\Delta_o}_{A}\, y_\Delta$$

Pequeña Ganancia: El bucle real es estable si el nominal lo es y

$$\boxed{\|W(I + GK)^{-1}GK\|_\infty \leq 1}$$

El bucle de control 1GL estandard



$$y = Gu = GK(r - y), \quad u = K(r - Gu), \quad e = r - y = r - GKe$$

Resulta en:

$$e = Sr = \underbrace{(I + GK)^{-1}}_{} \cdot r$$

S Debe ser pequeño (prestaciones nominales)

$$y = Tr = \underbrace{(I + GK)^{-1} GK}_{} \cdot r$$

T coincide con incert. multiplicativa (mejor cuanto más pequeño)

$$u = KSr = \underbrace{(I + KG)^{-1} K}_{} \cdot r$$

KS coincide con incert. aditiva (mejor cuanto más pequeño)

Conclusiones "intuitivas":

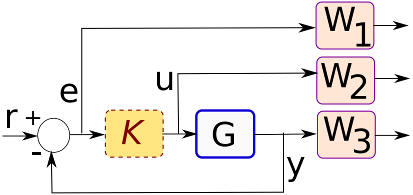
- **Limitar la acción de control** es bueno para tolerar mucha incertidumbre "aditiva".
  - Justificación de por qué poner $u^T R u$ en óptimo, predictivo, o obligar a pesar el control ($D_{12} \neq 0$) en el problema generalizado `h2syn/hinfsyn`.
- **Limitar la resonancia en bucle cerrado** (limitar sobreoscilación) es bueno para incertidumbre "relativa " (por ejemplo, error de $\pm 10\%$).

Pero "poco control rápido" y "tiempo de subida lento" reduce prestaciones:

- justificación "pequeña ganancia" de *compromiso especificaciones-robustez*.

Técnica Mixed Sensitivity

De las ecuaciones del bucle 1GL anteriores, calculando K para que la norma infinito (en bucle cerrado) del sistema de 1 entrada y 3 salidas siguiente:



sea menor que **1**, garantiza:

- $\bar{\sigma}(W_1 e(j\omega)) \leq 1$ [prestaciones nominales], caso W diagonal, $|e(j\omega)| \leq 1/|W_1(j\omega)|$
- Estab. robusta si $\bar{\sigma}(\Delta_{[+]}(j\omega)W_2^{-1}(j\omega)) \leq 1$ [aditiva], intuitivam. $\approx \Delta_{[+]} < W_2$
- Estab. robusta si $\bar{\sigma}(\Delta_o(j\omega)W_3^{-1}(j\omega)) \leq 1$ [multiplicativa], $\approx \Delta_o < W_3$

Implementación:

Caso particular problema $\mathcal{H}_\infty$ planta generalizada ponderada* estandard:

$$\begin{pmatrix} e_w \\ u_w \\ y_w \\ \cdots \\ e \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}}_{\text{pesos}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I & -G \\ 0 & I \\ 0 & G \\ I & -G \end{pmatrix}}_{\text{planta gen. no pond.}}}_{\text{planta gen. ponderada}} \cdot \begin{pmatrix} r \\ \cdots \\ u \end{pmatrix}$$

*Sin pesos de entrada.

En Matlab, para evitar "multi-incidencia" (repetir variables de estado de G haría necesario `minreal`), sería recomentable introducir la planta no ponderada como:

```
PGnoPond=[ [I;Z;Z;I]  [Z;I;Z;Z]+[-I;Z;I;-I]*G ]
```

siendo `I`, `Z` matrices *identidad* y *ceros* con las dimensiones adecuadas (1 y 0 en el caso SISO).

Mixed Sensitivity: diseño de pesos

`[K,CL,GAM,INFO]=mixsyn(G,W1,W2,W3)` en Matlab/Octave.

- Vale para monovariable y multivariable.
- **Parámetros de diseño**: filtros W_1, W_2, W_3 (usualmente blkdiag).
  Usualmente, se diseñan sus inversas (plantillas, límites de señales) en el error (W_1):
  - W_1: (informalmente, $\sigma(S) \leq W_1^{-1}$) paso bajo $\|e_p\| \leq 1/\underline{\sigma}(dcgain(W_1))$
  - W_2: (informalmente, $\sigma(KS) \leq W_2^{-1}$, $\Delta_+ < W_2$) paso alto, (o const. para reducir complejidad)
  - W_3: (informalmente, $\sigma(T) \leq W_3^{-1}$, $\Delta_{*o} < W_3$) paso alto (o const., o vacío)
- Controlador resultante es de orden de G + suma de orden de todos los pesos.
  - Reducción de orden para implementación aconsejable (`balred`,`modred`).

Mixed sensitivity: discusión (1:¿especificaciones tiempo?)

- Problema: **relación tiempo-frecuencia** poco clara... ¿Cómo diseñar el filtro del error W_1 para un tiempo de establecimiento y sobreoscilación dados?
    - Tiempo de **subida** t_R (rise time): (pasar del 10% al 90% del v.final) relacionado con el ancho de banda de bucle cerrado ($\overline{\sigma}(S(j\omega_B)) \leq 0.7 (\approx -3dB)$).
        - En primer orden $t_R(sec)\omega_B(rad/s) = \log(0.9/0.1) = 2.2$ [link]; en otros procesos, muy aproximadamente, $1.1/\omega_B \leq t_R \leq 2.2/\omega_B$ (en rad/s).
    - Sobreoscilación: relacionado con pico de resonancia de bucle cerrado (bajar pico de $T \approx W_3^{-1}$ o pico de $S \approx W_1^{-1}$ puede reducir la sobreoscilación).
- En multivariable, el tiempo de establecimiento/sobreoscilación pueden ser diferentes según qué maniobras (fáciles/difíciles) se ejecutan: el diseño en "tiempo" no está tan claro como en SISO; posiblemente los pesos deberían incorporar ideas de desacoplamiento SVD.

Mixed sensitivity: discusión (2: márgenes de error de modelado)

- Para hacer el diseño sencillo, recomendable pesos constantes.
  - Incertidumbre aditiva constante: a todas las frecuencias, incert. constante.
  - Incertidumbre multiplicativa constante [“a bajas frecuencias la precisión del modelo es $\pm 10\%$”] + incertidumbre aditiva constante [“una vez la planta baja de XXX dB” todo es incierto]
- La incertidumbre “aditiva” depende del escalado, la multiplicativa es adimensional; la incertidumbre multiplicativa no tiene sentido a alta frecuencia.
- En MIMO multiplicativa “a la entrada” (actuadores 10% de error) para trasladarla a la salida se multiplica por el número de condición.
- Pesos no constantes: dar valores a parámetros y usar **ucover** para generar un filtro que cubra la incertidumbre.

Mixed sensitivity: discusión (3: cancelación)

- Como entre K y G no entra ninguna señal exógena δ_u,
  - El regulador no tiene por qué "optimizar" la respuesta ante dichas señales no incluidas en la planta generalizada: la respuesta ante perturbaciones a la entrada $y = G \cdot (u + \delta_u)$ puede no ser buena.
  - el regulador óptimo puede hacer cancelación de la parte estable de G; de hecho, lo suele hacer (polos estables de G como ceros de K).

- Mixed sensitivity tiene el mismo inconveniente que "internal model control" (IMC) u otros diseños basados en **cancelación**: **la compensación de perturbaciones a la entrada de procesos con polos lentos o integradores puede ser muy lenta comparada con la respuesta ante referencia.**

Si eso causa problemas, debe incluirse δ_u en la planta generalizada (ya no es `mixsyn`).

Mixed sensitivity: discusión (4: ¿robustez prestaciones?)

- Prueba "prestaciones nominales" y "estabilidad robusta" si GAM<1.
- NO prueba "*prestaciones robustas*", esto es, no garantiza que el error esté por debajo de $(W1)^{-1}$ si la incertidumbre (adit., mult.) está por debajo de $W2$ y $W3$, respectivamente...
  - En algunos casos sí se cumple si se obtiene un GAM más pequeño (SISO, o plantas muy bien condicionadas), con incertidumbre sólo multiplicativa $G_{real} = (1+\Delta W_3)G$, $\|\Delta\|_\infty < 1$.

Caso SISO, con $W_2 = 0$, si GAM≤ 0.71, se puede probar que:

$$\left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_3 T \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \sqrt{(0.5)} = 0.71 \quad \Rightarrow \quad \|W_1 S_{real}\|_\infty = \left\| \frac{W_1}{1+KG(1+W_3\Delta)} \right\|_\infty = \left\| \frac{W_1 S}{1+TW_3\Delta} \right\|_\infty \leq 1$$

*En efecto, el peor caso de $\left\|\frac{W_1 S}{1+TW_3\Delta}\right\|$ se da con Δ que haga TW_3 colineal con 1, o sea $|W_1 S|/(1-|W_3 T|) \leq 1$. Con lo que se requiere $|W_1 S| + |W_3 T| \leq 1$, pero si ($x := |W_1 S|$, $y := |W_3 T|$) están en la circunferencia de radio $\sqrt{0.5}$, ese círculo está incluido en la banda $-1 \leq x+y \leq 1$, como se requiere.

Conclusiones

- Error de modelado: teorema de pequeña ganancia dice que la norma ∞ (ganancia máxima) de determinado subsistema debe ser "pequeña".
- El problema "sensibilidad mixta" (mixed sensitivity) aborda el diagrama de control de 1 grado de libertad, y resuelve una optimización $\mathcal{H}_\infty$.
- Prueba prestaciones nominales $\|W_1 S\|_\infty \leq 1$ y estabilidad robusta (NO prestaciones robustas, en general).
- No es trivial traducir especificaciones temporales a especificaciones en frecuencia; presenta problemas ante perturbaciones a la entrada (cancelación de dinámica).