

Incertidumbre en factores coprimos: efecto del escalado

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

<http://personales.upv.es/asala/YT/V/ncfesc.html>



UNIVERSITAT
POLITÀCNICA
DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación: Un par planta–controlador pueden cambiarse de unidades (0–100 l $\rightarrow$ 4–20 mA). Los márgenes de robustez deberían ser los mismos (adimensionalizando adecuadamente). El margen ante incertidumbre factorizada normalizada es un número que une varias incertidumbres, pero no es adimensional y, por tanto, depende de escalado.

Objetivos:

Comprender la dependencia del margen ante incertidumbre coprime normalizada (Matlab `ncfmargin`) con el escalado y sugerir recomendaciones para que tenga sentido en aplicaciones.

Contenido:

Factorización coprime normalizada, relación con otras incertidumbres, dependencia del escalado, recomendaciones prácticas, conclusiones.

Tma peq. ganancia en representación factorizada

Supongamos modelo **nominal** $Y = M^{-1}N \cdot u$, siendo $M^{-1}N$ una factorización coprima normalizada: (M, N) estables, primos entre sí, y

$$M(j\omega)M^H(j\omega) + N(j\omega)N^H(j\omega) = I$$

Supongamos que proceso **real** es:

$$y = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \cdot u$$

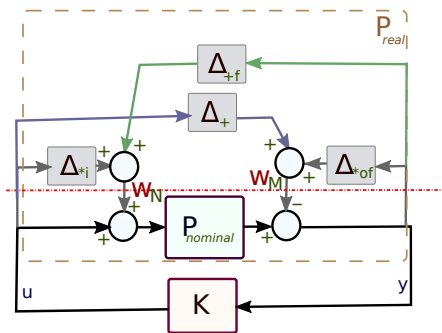
Si $\|T\|_\infty \leq 1$ el sistema será estable robustamente para todo Δ tal que

$$\|\Delta\|_\infty = \|\begin{bmatrix} \Delta_M & \Delta_N \end{bmatrix}\|_\infty < 1,$$

$$T(s) = \begin{pmatrix} K \\ I \end{pmatrix} (I - PK)^{-1} \begin{pmatrix} I & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} KS & 1 - S \\ S & SP \end{pmatrix}$$



Interpretación 2



$$\begin{pmatrix} w_M \\ w_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta_{+} & \Delta_{*of} \\ \Delta_{*i} & \Delta_{+f} \end{pmatrix}}_{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

$$y = \underbrace{(I + \Delta_{*of} - P\Delta_{+f})^{-1}(P(I + \Delta_{*i}) - \Delta_{+})}_{P_{real}} u$$

► Si norma de T pequeña, robusto ante cualquier combinación de incertidumbres **aditiva**, **aditiva inversa**, **multiplicativa entrada** o **multiplicativa inversa** (en salida), tal que su efecto conjunto esté limitado por $\|\Delta\|_{\infty} < \|T\|_{\infty}^{-1}$.

El problema del escalado

Supongamos cambio de unidades, $y = E_y \cdot y_{esc}$, $u = E_u \cdot u_{esc}$, con lo que

$$P_{esc} = E_y^{-1} P E_u, \quad K_{esc} = E_u^{-1} K E_y$$

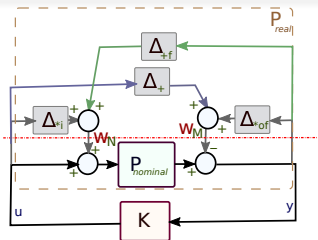
entonces realmente el bucle de control ($y_{esc} = P_{esc} u_{esc}$, $u_{esc} = K_{esc} y_{esc}$) es el mismo... **¡Pero ncfmargín cambia!**

Pasemos a Matlab...



UNIVERSITAT
POLITÉCNICA
DE VALÈNCIA

¿Por qué?



$$\begin{pmatrix} w_M \\ w_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta_+ & \Delta_{*of} \\ \Delta_{*i} & \Delta_{+f} \end{pmatrix}}_{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

$$y = \underbrace{(I + \Delta_{*of} - P\Delta_{+f})^{-1}(P(I + \Delta_{*i}) - \Delta_+)}_{P_{real}} u$$

$$\begin{aligned} y_{esc} &= E_y^{-1}(I + \Delta_{*of} - E_y P_{esc} E_u^{-1} \Delta_{+f})^{-1} (E_y P_{esc} E_u^{-1} (I + \Delta_{*i}) - \Delta_+) E_u u_{esc} \\ &= E_y^{-1}(I + \Delta_{*of} - E_y P_{esc} E_u^{-1} \Delta_{+f})^{-1} E_y (P_{esc}(I + E_u^{-1} \Delta_{*i} E_u) - E_y^{-1} \Delta_+ E_u) u_{esc} \\ &= (I + \underline{E_y^{-1} \Delta_{*of} E_y} - \underline{P_{esc} E_u^{-1} \Delta_{+f} E_y})^{-1} (\underline{P_{esc}(I + E_u^{-1} \Delta_{*i} E_u)} - \underline{E_y^{-1} \Delta_+ E_u}) u_{esc} \end{aligned}$$

El tamaño de las incertidumbre se ve alterado por los escalados.

Las incertidumbres multiplicativas diagonales/monovariantes no se alteran, pero las aditivas sí (y las multiplicativas MIMO no estructuradas también).

Recomendaciones

Los creadores de la técnica recomiendan $\text{ncfmargin} > 0.25$, ello implica que margen ante cada incertidumbre individual es mayor de 0.25... para que signifique algo, deberían ser “comparables”:

- Escalar para que estimemos que Δ_+ , Δ_{+f} , Δ_{*of} , Δ_{*i} tengan valores “parecidos” en mi aplicación.
- Equiv. escalar para que Δ_M , Δ_N tengan valores “parecidos”... o sea, para $N \approx M$.
- $N \approx M$ cuando $P(j\omega) \approx 1$ (frecuencia cruce 0dB Bode, approx. con $|u| < 1$ ancho de banda BC alcanzable). **ncfmargin** devuelve tamaño combinado de las cuatro incertidumbres tolerable cerca de “cruce”.

Escalar para que Δ_+ , Δ_{+f} , Δ_{*of} , Δ_{*i} tengan valores “parecidos” en el entorno del ancho de banda deseado de bucle cerrado (punto más cercano al -1 en Nyquist, margen de fase, retardo). Usualmente, frecuencia $\approx$ dos o tres veces polo dominante.

Recomendaciones finales

► Si suponemos errores multiplicativos del $x\%$, aditivos de $x\%$ de la ganancia estática a altas frecuencias, aditivos del $x\%$ de inversa de ganancia alrededor de picos de resonancia... y queremos obtener un estimado de x : **escalar planta a ganancia estática ≈ 1** .

A bajas frecuencias la fact. normalizada será $N \approx M \approx \sqrt{1/2}$.

Matlab: dados P , K , comprobar `ncfmargin(P/dcgain(P),K*dcgain(P))`.

Sistemas con resonancias significativas: La incertidumbre sobre la inversa nunca podrá ser mayor que $1/\text{pico_res}$... si $\text{pico_res} \gg 1$, para equilibrar **escalar a media (en dB, media geométrica) entre dcgain y pico de resonancia ≈ 1** .

MIMO: Ganancia es una matriz... escalar para buen condicionamiento (evitar $[1000 \ 0; 0 \ 1.5]$ pasando de mV a V), posicionar intervalo de ganancias mínima-máxima-resonancia alrededor de **$[0.5-2]$** .

Conclusiones

- Margen incertidumbre coprime normalizada tiene 2 interpretaciones:
 - Error en numerador Δ_N y denominador Δ_M .
 - Error combinado aditivo-multiplicativo-directo-inverso.
- Los escalados cambian el tamaño y la importancia relativa de (Δ_M, Δ_N) o de $(\Delta_+, \Delta_{+f}, \Delta_{*of}, \Delta_{*i})$.
- A falta de descripción más “refinada” de error de modelado, `ncfmargin` suele dar resultados interpretables con sistema escalado a ganancia cercana a 1. Si proceso se escala para baja frecuencia alrededor de `[0.5-2]`, `ncfmargin( $P_{esc}, K_{esc}$ ) > 0.3` sugiere:
 - Robustez aceptable en bastantes aplicaciones
 - Pico sensibilidad (ref→error), sens. complement. (ref→salida) razonable ($\lesssim 3$)
 - [Diseño “clásico” SISO en frecuencia]: margen fase $\gtrsim 20^\circ$, marg. ganancia $\gtrsim 1.5$