Cálculo de la norma ∞ de un sistema lineal

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Presentación en vídeo en http://personales.upv.es/asala/YT/V/**ninfa**.html y http://personales.upv.es/asala/YT/V/**ninfb**.html

Introducción

Motivación:
La norma infinito es clave en control óptimo y robusto.

Objetivos:
Comprender un mecanismo para calcularla en sistemas lineales.

Contenidos:
Motivación. Preliminares sobre interconexiones y números complejos. Sistema adjunto. Derivación de la matriz Hamiltoniana y teorema principal.

Motivación y planteamiento del problema

- La norma infinito de un sistema lineal es el pico de la respuesta en frecuencia (MIMO: máximo valor del máximo valor singular de la matriz de resp. en frec.):

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}\left(G(j\omega)\right)$$

  - Su interpretación "sencilla" es como "pico de resonancia" de un sistema. Se usa en control óptimo y robusto (ganancia "peor caso"), con los adecuados pesos.

- La forma de cálculo más "directa" sería hacer un **mallado** en frecuencia; p. ej. barrer $[0, 500]$ rad/s con 1000 puntos con granularidad de 0.5 rad/s: $\omega \in \Omega := \{0, 0.5, 1, 1.5 \ldots, 500\}$, y determinar el máximo de ellos.
  - ¿Cuál es la granularidad necesaria? ¿Cuál es la frecuencia máxima necesaria? Si el sistema tiene resonancias "estrechas" podríamos tener mucho error...
  - Existen metodologías que evitan el mallado: matriz hamiltoniana y LMI.

Preliminares: interconexiones

Denotamos $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ y\end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right]\begin{pmatrix}x\\ u\end{pmatrix}$ simplemente con $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right]$.

- La interconexión en serie de $G_1 := \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1\end{array}\right]$ y $G_2 := \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2\end{array}\right]$ es

$$G_2 G_1 = \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D_2 D_1 \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

- La inversa de $G := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D\end{array}\right]$ es $G^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1}\end{array}\right]$.

Preliminares: números complejos

El módulo de $\xi=\alpha+j\beta$ verifica $|\xi|^2=\bar{\xi}\xi=(\alpha-j\beta)(\alpha+j\beta)=\alpha^2+\beta^2$.

La norma de un vector complejo $\xi:=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, con $\xi_i=\alpha_i+j\beta_i$, verifica:

$$\left\|\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right\|^2=|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=\underbrace{\begin{pmatrix}\bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2\end{pmatrix}}_{\xi^*}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}}_{\xi}=\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2$$

Si $\xi=\Psi\eta$, entonces $\|\xi\|^2=(\Psi\eta)^*\cdot(\Psi\eta)=\eta^*\cdot(\Psi^*\cdot\Psi)\cdot\eta$.

- El máximo valor singular de una matriz compleja Ψ es $\overline{\sigma}(\Psi):=\sqrt{\lambda_{max}(\Psi^*\cdot\Psi)}$ donde Ψ^* denota la **matriz transpuesta conjugada** y $\lambda_{max}(\cdot)$ el máximo valor propio.

Nota: La matriz $\Psi^*\cdot\Psi$ tiene todos sus autovalores reales y mayores o iguales que cero.

Sistema adjunto $G^{\sim}$

Dado un sistema $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, con matrices A, B, C, D reales, su matriz de resp. en frecuencia es: $G(j\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B + D$.

Su transpuesta conjugada es:

$$G^*(j\omega) = G^T(-j\omega) = B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}C^T + D^T$$
$$= B^T(j\omega I + A^T)^{-1}\cdot(-C)^T + D^T = B^T(j\omega I - (-A^T))^{-1}\cdot(-C)^T + D^T$$

Si definimos $G^{\sim}(s) := G^T(-s)$, su representación interna es:

$$G^{\sim} = \left[\begin{array}{c|c} -A^T & -C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array}\right]$$

Con ello, $G^*(j\omega)\cdot G(j\omega) = G^T(-j\omega)\cdot G(j\omega) = G^{\sim}(j\omega)\cdot G(j\omega)$.

De la transp. anterior,

$$\Phi(\omega) := G^*(j\omega)G(j\omega) = G^T(-j\omega)G(j\omega) = G^\sim(j\omega)G(j\omega)$$

es una matriz hermítica (generalización de simétrica a caso complejo $\Phi^* = \Phi$), con valores propios reales positivos (o cero) de modo que:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_{max}\left(\Phi(\omega)\right)}$$

Tomando máximos en frecuencia, tenemos el resultado fundamental:

- La norma ∞ de un sistema es
$$\|G\|_\infty = \sqrt{\sup_{0\leq\omega<\infty} \lambda_{max}\left(\Phi(\omega)\right)}$$

- La norma de G es menor de γ sí y sólo si $\gamma^2 I - \Phi(\omega)$ es una matriz **definida positiva** (denotamos $\succ 0$) **para todo** ω.

Cálculo de Φ mediante representación interna

A partir de la interconexión en serie, la representación interna de $\Phi(s) := G^{\sim}(s)G(s)$ es:

$$G^{\sim} \cdot G = \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B \\ -C^T D \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} D^T C & B^T \end{pmatrix} & D^T D \end{array}\right]$$

y, de la transp. anterior, la matriz de resp. en frecuencia de $G^{\sim}G$ tiene valores propios **reales**, y son el cuadrado de los valores singulares de la respuesta en frecuencia de G.

- La norma de G es menor de γ sí y sólo si $\Theta(\infty) := (\gamma^2 I - D^T D) \succ 0$ y $\Theta(s) := (\gamma^2 I - G^{\sim}(s)G(s))$ **no tiene CEROS en el eje imaginario**.

  La resp. frec. en infinito es D. si $\Theta(\infty) > 0$ entonces a frecuencia infinita la norma es menos de γ. Si la norma llega a valer γ o más, entonces $\Theta(s)$ pasará por cero en algún punto del eje imaginario, por continuidad.

Transformación a problema de **polos**

A partir de $G^{\sim}G$, definamos:

$$\Theta := \gamma^2 I - G^{\sim}\cdot G = \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -B \\ C^T D \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} D^T C & B^T \end{pmatrix} & \gamma^2 I - D^T D \end{array}\right]$$

- que Θ no tenga **ceros** imaginarios puros es equivalente a que Θ^{-1} no tenga **polos** imaginarios puros. Con la fórmula de la inversa:

$$\Theta^{-1} = (\gamma^2 I - G^{\sim}\cdot G)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H} & \begin{pmatrix} -B \\ C^T D \end{pmatrix} R^{-1} \\ \hline R^{-1}\begin{pmatrix} D^T C & B^T \end{pmatrix} & R^{-1} \end{array}\right]$$

con $R = \gamma^2 I - D^T D$,

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -B \\ C^T D \end{pmatrix} R^{-1} \begin{pmatrix} D^T C & B^T \end{pmatrix}$$

Resultado final

- La norma infinito de un sistema lineal $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ es menor que γ

sí y solo sí:

- $\lambda_{max}(D^T D) \leq \gamma^2$, y
- La matriz Hamiltoniana:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -A^T - C^T DR^{-1}B^T \end{pmatrix}$$

no tiene ningún autovalor **imaginario puro** (con $R = \gamma^2 I - D^T D$).

*Realmente Θ^{-1} podría tener polos imaginarios no observables/controlables que no se vieran en el comportamiento entrada/salida, por lo que la demostración no está completa (falta probar que eso NO ocurre). Ver Secc 4.4 de [Zhou & Doyle, 1999, *Essentials of Robust Control*] para detalles.

Conclusiones

- Se ha presentado una fórmula basada en **valores propios** de una matriz **H** que comprueba si la norma ∞ de un sistema multivariable lineal está o no por debajo de un cierto $\gamma > 0$. Necesario un algoritmo de **bisección** posterior.
- Como alternativa, podría haberse hecho un **mallado** en la frecuencia, pero no está claro en qué intervalo de frecuencias ni con qué granularidad buscar el máximo.
- Existe una tercera opción de cálculo basada en **LMI** (desigualdades matriciales lineales, Linear Matrix Inequalities) que, por brevedad, no es objetivo de este material.