Métrica ν-gap: justificación intuitiva de la fórmula (caso real, SISO)

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

Universitat Politècnica de València

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**gapm1**.html

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Introducción

Motivación: Dado un bucle de control, `ncfmargin(P,K)` devuelve el margen ante error de modelado en la *factorización coprima normalizada* $P = ND^{-1}$, $N^* \cdot N + D^* \cdot D = I$. El concepto parece "difícil" de entender y es poco operativo, al menos a primera vista.

Objetivos: Comprender el significado geométrico de la incertidumbre coprima normalizada... en un caso real, monovariable, por simplicidad, para comprender mejor intuitivamente el significado geométrico del ν-gap de Vinnicombe entre sistemas dinámicos.

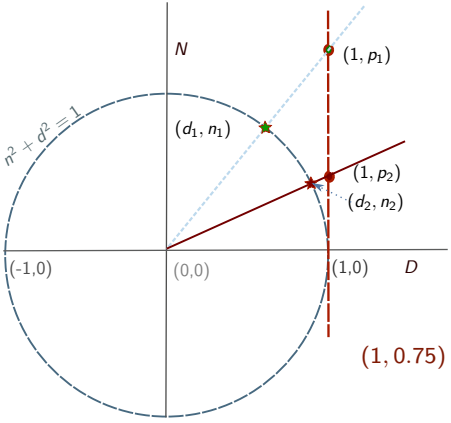
Uncertainty and Feedback, $\mathcal{H}_\infty$ Loop-Shaping and the ν-gap Metric, G. Vinnicombe (2000)

Contenido:
Interpretación geométrica (caso real).

Caso Real, interpretación geométrica (1)

Simbolizaremos $p = n/d$, $d \neq 0$, con $(d, n) \in \mathbb{R}^2 \sim \{(0, n)\}$.

Fracciones equivalentes denotaremos con $(d_a, n_a) \equiv (d_b, n_b)$ si $n_a/d_a = n_b/d_b$.



Factorización normalizada verifica $n^2 + d^2 = 1$.

Cualquier $p_1 \in \mathbb{R}$, equivalentemente interpretado como fracción $p_1/1$, puede ser "proyectado" (normalizado) a la circunferencia centro 0 radio 1, que llamamos $\mathcal{B}$.

$p_1/1$ verifica $(1, p_1) \equiv (\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1+p_1^2}}}^{d_1}, \overbrace{\frac{p_1}{\sqrt{1+p_1^2}}}^{n_1})$

Ejemplo:

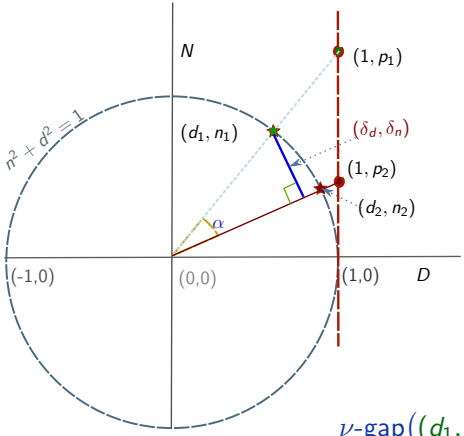
$(1, 0.75) \equiv (4, 3) \equiv (12, 9) \equiv (\frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}}, \frac{0.75}{\sqrt{1+0.75^2}}) = (0.8, 0.6)$

©2022 A. Sala

Caso Real, interpretación geométrica (1)

Simbolizaremos $p = n/d$, $d \neq 0$, con $(d, n) \in \mathbb{R}^2$.

Fracciones equivalentes denotaremos con $(d_a, n_a) \equiv (d_b, n_b)$ si $n_a/d_a = n_b/d_b$.



Factorización normalizada verifica $n^2 + d^2 = 1$.

Cualquier $p_1 \in \mathbb{R}$, interpretado como $p_1/1$, puede ser "proyectado" (normalizado) a la circunferencia centro 0 radio 1, que llamamos $\mathcal{B}$.

$p_1/1$ verifica $(1, p_1) \equiv (\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1+p_1^2}}}^{d_1}, \overbrace{\frac{p_1}{\sqrt{1+p_1^2}}}^{n_1})$

Dado $(d_1, n_1) \in \mathcal{B}$, el (δ_d, δ_n) más pequeño tal que $(d_1 + \delta_d, n_1 + \delta_n) \equiv (d_2, n_2) \in \mathcal{B}$ es la diferencia entre (d_1, n_1) y su proyección sobre la recta $(\gamma d_2, \gamma n_2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Denotaremos:

$$\nu\text{-gap}\big((d_1, n_1), (d_2, n_2)\big) := \|(\delta_d, \delta_n)\| = |\sin(\alpha)|$$

©2022 A. Sala

Expresión normalizada y no normalizada de ν-gap

El producto escalar de dos vectores de norma 1 es el *coseno* del ángulo que forman. Considerando el vector perpendicular a (d_2, n_2), esto es $(-n_2, d_2)$, entonces, como tienen norma unidad, la expresión del ν-gap a partir de la fact. normalizada $(n_1^2 + d_1^2 = n_2^2 + d_2^2 = 1)$ es:

$$|\sin(\alpha)| = |\cos(90^o - \alpha)| = |(d_1, n_1) \cdot (-n_2, d_2)| = |-n_2 d_1 + d_2 n_1|$$

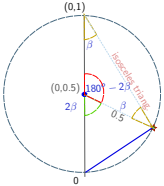
Normalizamos $(1, p_1) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{1+p_1^2}}, \frac{p_1}{\sqrt{1+p_1^2}}\right)$ y $(1, p_2) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{1+p_2^2}}, \frac{p_2}{\sqrt{1+p_2^2}}\right)$, y el resultado es, en términos directos (no necesario expr. normalizada):

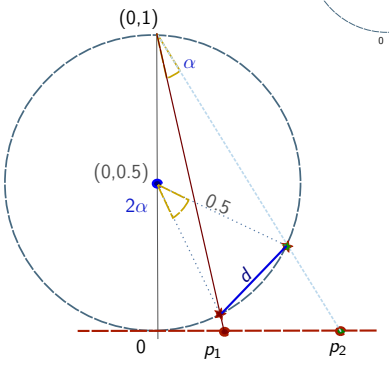
$$|\sin\alpha| = |\psi(p_1, p_2)| = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{1+p_1^2} \cdot \sqrt{1+p_2^2}}$$

©2022 A. Sala

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Interpretación geométrica (2): distancia cordal





- Esta circunferencia (diámetro 1) tiene la mitad de radio que la de transparencia 3 (tenía radio 1).
- La longitud de una cuerda que abarca un ángulo β de una circunferencia de radio ρ es $d = 2\rho \sin(\beta/2)$.

En este caso $\rho = 0.5$, $\beta = 2\alpha$, con lo que $d = \sin\alpha$.

Este tipo de construcción geométrica se denomina **proyección estereográfica**.

Conclusiones

- Las factorizaciones $p = d^{-1}n$ se pueden asimilar a una recta $q \cdot (d, n)$ en el espacio del "grafo" en $\mathbb{R}^2$. La factorización normalizada es el punto sobre la circunferencia centrada en el origen, radio unidad.
- La mínima distancia entre dos fracciones normalizadas de modo que $\exists q$ tal que $(d_1 + \delta_d, n_1 + \delta_n) = q \cdot (d_2, n_2)$, tiene una interpretación como el val. abs. del seno del ángulo que forman las rectas asociadas.
- Dicho valor es $|n_1 d_2 - d_1 n_2|$ (normalizado), equiv. $|p_1 - p_2|/\sqrt{(1 + p_1^2)(1 + p_2^2)}$ (no normalizado).
- También tiene interpretación como distancia cordal en una proyección estereográfica.
- La denominada métrica ν-gap generaliza la idea a plantas MIMO descritas con $P_1(s) = D_1^{-1}(s)N_1(s)$, $P_2(s) = D_2^{-1}(s)N_1(s)$.