Observadores de orden reducido

Antonio Sala

DISA–AI^2–UPV

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**roobste**.html

Presentación

Motivación:
Un observador estima "todos" los estados, pero... si se dispone de un sensor de calidad suficiente, ¿por qué complicarse estimando lo que ya se mide bien?

Objetivos:
Comprender el desarrollo y posible utilidad del observador de orden reducido lineal.

Contenidos:
Planteamiento del problema. Transformación previa (en algunos casos). Solución. Conclusiones.

Planteamiento del problema

Consideremos un sistema con ecuación de estado:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u$$

y ecuación de salida:

$$y_{m\times 1} = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Objetivo: Deseamos prescindir de la dinámica de x_1 dado que es directamente medible (con calidad suficiente para la aplicación), y queremos estimar únicamente x_2.

Transformación previa (para caso general $y = Cx + Du$)

Si tenemos una ecuación de salida $y = Cx$, podemos hacer una cambio de variable

$$\begin{pmatrix} x_1^{new} \\ x_2^{new} \end{pmatrix} = T \cdot x = \begin{pmatrix} C \\ N \end{pmatrix} \cdot x$$

siendo N cualquier matriz de modo que $\begin{pmatrix} C_{m\times n} \\ N_{(n-m)\times n} \end{pmatrix}$ sea de rango completo (p.ej., $N = null(C)^T$, el complemento ortogonal).

Con ello $y = x_1^{new}$, con lo que está en la forma de la transparencia anterior.

- Si tenemos $y = Cx + Du$, primero hacemos cambio $\bar{y} = y - Du = Cx$, y luego el de T. Si tenemos sensores de y, podemos calcular $\bar{y}$.

Solución del problema

Si $x_1 \equiv y$ es conocido, sólo debería interesarnos la dinámica de x_2:

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2 u + A_{21} y$$

Si la primera ecuación se conoce “perfecta” $y = x_1$, por tanto (hipotéticamente) podemos calcular $\dot{y}$, entonces podemos “medir” una salida asociada a x_2:

$$A_{12}x_2 = \dot{y} - A_{11}y - B_1 u$$

por tanto $\tilde{y} = A_{12}x_2$ hará las veces de ecuación de salida.
Un observador de x_2 sería:

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = A_{22}\hat{x}_2 + B_2 u + A_{21}y + L \cdot (\tilde{y} - A_{12}\hat{x}_2)$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = A_{22}\hat{x}_2 + B_2 u + A_{21} y + L \cdot (\tilde{y} - A_{12}\hat{x}_2)$$

Problema: NO es realizable.

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = A_{22}\hat{x}_2 + B_2 u + A_{21} y + L \cdot (\dot{y} - A_{11} y - B_1 u - A_{12}\hat{x}_2)$$

Cambio de variable $w = \hat{x}_2 - Ly$:

$$\frac{dw}{dt} = (A_{22} - LA_{12})\hat{x}_2 + B_2 u + A_{21} y - LA_{11} y - LB_1 u$$

es realizable, pero no es una ec. de estado.
Si sustituimos $\hat{x}_2 = w + Ly$:

$$\frac{dw}{dt} = (A_{22} - LA_{12}) \cdot (w + Ly) + B_2 u + A_{21} y - LA_{11} y - LB_1 u$$

queda resuelto.

Ecuaciones finales del observ. orden reducido

Manipulando, queda la ec. de estado del observador:

$$\frac{dw}{dt} = \underbrace{(A_{22} - LA_{12})}_{A_{obs}} w + \underbrace{(B_2 - LB_1)}_{B_{obs,u}} u + \underbrace{((A_{22} - LA_{12})L + (A_{21} - LA_{11}))}_{B_{obs,y}} y$$

que se completa con la ec. de salida:

$$\hat{x}_2 = w + Ly$$

Deben asignarse los polos de $A_{obs} = A_{22} - LA_{12}$.

Matlab: `L=place(`A_{22}`',`A_{12}`',p)'`

Conclusiones

- Consideraremos las salidas medidas como estados $y = x_1$, queremos observar x_2.
  - Si la ecuación original es $y = Cx + Du$, se puede hacer un cambio de variable para tener $\bar{y} = y - Du = x_1^{new}$.
- Hay ecuación de estado y de salida.
- Para realizabilidad, el estado w del observador no es $\hat{x}_2$.
- Puede calcularse con asignación de polos.
- Si la medida $y = x_1$ es muy ruidosa, podría ser preferible un observador de orden completo que también "filtrase" x_1.
  - En particular, el observador de mínima varianza (filtro de Kalman) es de orden completo.