

# Interconexión de sistemas en representación interna: caso general con realimentación

Antonio Sala

Notas sobre control de sistemas complejos

DISA – Universitat Politècnica de València



UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA  
DE VALÈNCIA

# Introducción

## Motivación:

En un diagrama de bloques pueden aparecer elementos en representación interna (de hecho, es recomendable en control multivariable).

## Objetivos:

Comprender cómo calcular la representación interna de interconexiones generales de sistemas multivariables que incluyan realimentación.

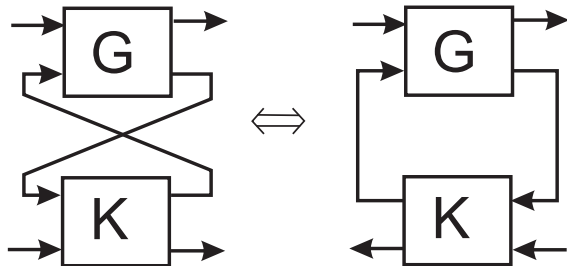
## Contenidos:

La interconexión LFT star product. Ecuaciones en representación interna (variables de estado) de bucle cerrado. Interconexión (bucle) bien planteada.



UNIVERSITAT  
POLITÉCNICA  
DE VALÈNCIA

# La interconexión genérica entre sistemas

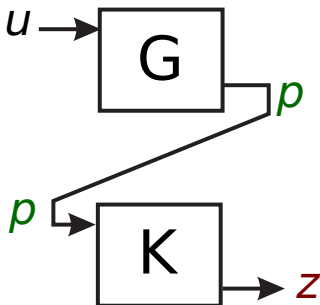


Un subconjunto de salidas de  $G$  es entrada de  $K$ , y otro subconjunto de salidas de  $K$  es entrada de  $G$ .

► Generaliza el concepto de “bucle cerrado/realimentación”. Se denomina “star product”  $[G \star K]$  en alguna literatura.

## Ejemplo 1: conexión en cascada

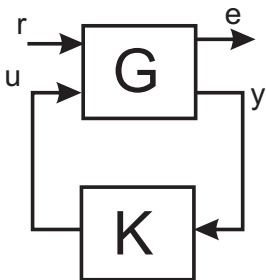
Eliminando señales del bucle, se reduce a la conexión en cascada:



La interconexión genérica contempla selección/agrupación de variables, cascada, realimentación...

## Ejemplo 2: LFT inferior

Casi todos los problemas de control (sin incertidumbre) pueden expresarse como este diagrama de bloques:



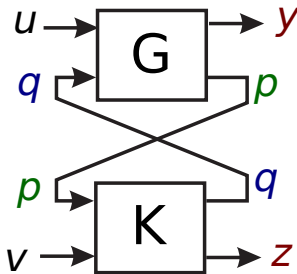
El control accede a un subconjunto de la información disponible (variables medidas) y con ellas calcula unas acciones de control. Existen otras entradas (referencias, perturbaciones) y salidas de interés.

► Para abarcar el problema con toda la generalidad posible,  $G$  no es la “*planta física*” a controlar, sino una “*planta generalizada*” obtenida a partir de ella.

# Interconexión en representación interna

Las ecuaciones de este bucle son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= A_G x_G + [B_{G1} \ B_{G2}] \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{G1} \\ C_{G2} \end{pmatrix} x_G + \begin{pmatrix} D_{G11} & D_{G12} \\ D_{G21} & D_{G22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} \\ \dot{x}_K &= A_K x_K + [B_{K1} \ B_{K2}] \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{K1} \\ C_{K2} \end{pmatrix} x_K + \begin{pmatrix} D_{K11} & D_{K12} \\ D_{K21} & D_{K22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}\end{aligned}$$



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

## Representación resultante (I)

Primero, despejemos el bucle que involucra a  $p$  y  $q$ :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_{G22} \\ D_{K11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{G2} & 0 \\ 0 & C_{K1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{G21} & 0 \\ 0 & D_{K12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

con lo que, siendo  $R := I - \begin{pmatrix} 0 & D_{G22} \\ D_{K11} & 0 \end{pmatrix}$ , si es invertible se tiene:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_{G2} & 0 \\ 0 & C_{K1} \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \underbrace{R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_{G21} & 0 \\ 0 & D_{K12} \end{pmatrix}}_T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

que particionando  $S$  y  $T$  adecuadamente, escribimos como:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{p1} & S_{p2} \\ S_{q1} & S_{q2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{p1} & T_{p2} \\ T_{q1} & T_{q2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



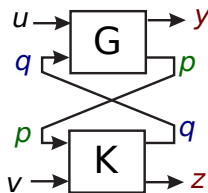
## Representación resultante (II)

En forma normalizada, eliminando  $p$  y  $q$ , tenemos la ecuación de **estado**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_G + B_{G2}S_{q1} & B_{G2}S_{q2} \\ B_{k1}S_{p1} & A_K + B_{k1}S_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} B_{G1} + B_{G2}T_{q1} & B_{G2}T_{q2} \\ B_{k1}T_{p1} & B_{K2} + B_{k1}T_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y de **salida**:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{G1} + D_{G12}S_{q1} & D_{G12}S_{q2} \\ D_{K21}S_{p1} & C_{K2} + D_{K21}S_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ x_K \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} D_{G11} + D_{G12}T_{p1} & D_{G12}T_{p2} \\ D_{K21}T_{p1} & D_{K22} + D_{K21}T_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## Bucles bien planteados

- La interconexión (bucle cerrado) se denomina “bien planteada” (well posed) si

$$R = \begin{pmatrix} I & -D_{G22} \\ -D_{K11} & I \end{pmatrix}$$

es invertible.

*\*Se puede demostrar que equivale a  $(I - D_{G22}D_{K11})$  invertible.*

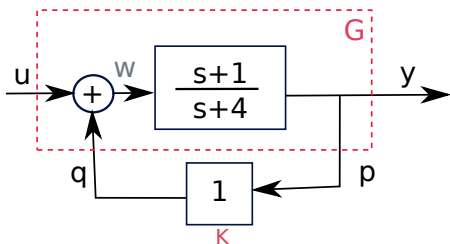
- Si  $D_{G22}D_{K11} = 0$  (al menos uno de los dos sistemas no tiene acoplamiento directo entre  $p$  y  $q$ ), entonces el bucle siempre estará bien planteado.

Si  $D_{G22}D_{K11} \neq 0$  entonces hay un **bucle algebraico** y la invertibilidad de  $R$  debe ser comprobada explícitamente.



# Ejemplo bucle mal planteado

Este bucle está mal planteado:



$$y(s) = \frac{s+1}{s+4}(u(s) + y(s))$$

$$\left(1 - \frac{s+1}{s+4}\right)y = \frac{s+1}{s+4}u$$

$$\frac{3}{s+4}y = \frac{s+1}{s+4}u$$

$$y(s) = \frac{s+1}{3}u(s)$$

Como  $(s+1)/(s+4) = 1 - 3/(s+4)$ ,  $w = u + q$ , la representación interna de  $G$  es:

$$\dot{x}_G = -4x + (-3 \quad -3) \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_G + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}$$

# Conclusiones

- El comando `lift` de Matlab ejecuta esta conexión.
- Fórmulas idénticas para caso discreto.
- En la mayor parte de casos multivariables, la interconexión en representación interna resulta computacionalmente más sencilla (y precisa) que la multiplicación/inversión de matrices de transferencia: en espacio de estados se opera sólo con matrices constantes.
- Si el bucle cerrado no está bien planteado, aparecen funciones de transferencia de bucle cerrado *no realizables*, sin sentido físico. \*Esta situación debe evitarse.