Métodos Subespacio para Identificación: identificación de Filtro de Kalman

Antonio Sala Piqueras

Identificación de sistemas complejos

Dept. Ing. Sistemas y Automatica (DISA)

Universitat Politècnica de València (UPV)

Video-presentación disponible en:

http://personales.upv.es/asala/YT/V/**subspk**.html

Presentación

Motivación:

Los métodos ID subespacio permiten identificar una secuencia de estados y matrices A, B, C, D a partir de datos de entrada-salida, mediante mínimos cuadrados y SVD. Dado que el filtro de Kalman (observador óptimo) se puede entender como mínimos cuadrados, ¿pueden usarse los mismos datos para obtener dicho filtro?

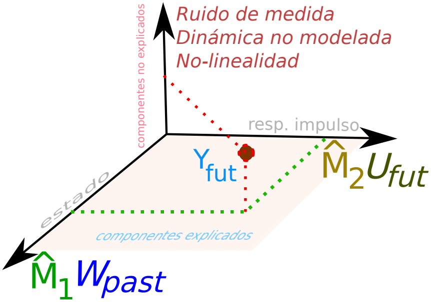
Objetivos:

Comprender como una modificación sencilla de un paso del algoritmo ID subespacio permite identificar **observadores óptimos** basados en datos.

Contenidos:

Revisión de conceptos. Modelo de regresión para identificación de observador. Conclusiones.

Interpretación geométrica



La ID Subespacio plantea una regresión $Y_{fut} = \hat{M}_1 W_{past} + \hat{M}_2 U_{fut}$.

Con entrada ruido blanco, el vector Y_{fut} es **proyectado** sobre tres subespacios ortogonales:

- El generado por entradas futuras U_{fut},
- El generado por las filas de W_{past} (información del pasado con correlación con el futuro... "**estado**"),
- El resíduo no explicado.

Idea básica: rango/SVD

La matriz $F := \hat{M}_1 W_{past}$ es una proyección de Y_{fut} sobre las combinaciones lineales de las filas de W_{past}, es el componente de Y_{fut} explicado por el pasado.

El `svd(F,'econ')` debería dar $F_{(h_f+1)\times\nu} = U_{(h_f+1)\times n} \cdot S_{n\times n} \cdot (V_{\nu\times n})^T$. La relación entre modelo entrada-salida y representación interna es $F = \hat{M}_1 W_{past} = \mathbb{O} \cdot [x_k \; x_{k+1} \dots]$.

Resultado principal

$$\mathbb{O} := US^{1/2}, \qquad [\hat{x}_k \; \hat{x}_{k+1} \dots] := S^{1/2} V^T$$

se cumple $F = \mathbb{O} \cdot [\hat{x}_k \; \hat{x}_{k+1} \dots]$.

Con datos “prácticos” (ruido), suponer 0 los elementos **pequeños** de diag(S), y eliminar columnas de V asociadas.

Identificación subespacio: Matrices A, B.

[5.] Las matrices de la ecuación de estado del sistema se generan obteniendo $\hat{A}$, $\hat{B}$ con mínimos cuadrados matriciales, siendo $\hat{x}_k$ la columna k de Ψ_x, tamaño $n \times 1$, en

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} & \hat{x}_{k+2} & \dots \end{pmatrix}}_{\Psi_{x+}} \approx \hat{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots \end{pmatrix}}_{\Psi_x} + \hat{B} \cdot \begin{pmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} & \hat{x}_{k+2} & \dots \end{pmatrix}}_{\Psi_{x+}} \approx \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots \\ u_k & u_{k+1} & \dots \end{pmatrix}}_{\Xi}$$

obteniendo: $\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = \Psi_{x+} \cdot pinv(\Xi)$.

Identificación del observador óptimo (Kalman)

De:

$$\begin{pmatrix}\hat{x}_{k+1} & \hat{x}_{k+2} & \dots\end{pmatrix} \approx \hat{A}_{KF} \cdot \begin{pmatrix}\hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots\end{pmatrix} + \hat{B}_{KF} \cdot \begin{pmatrix}u_k & u_{k+1} & \dots\end{pmatrix} + \hat{L} \cdot \begin{pmatrix}y_{k+1} & y_{k+2} & \dots\end{pmatrix}$$

esto es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\hat{x}_{k+1} & \hat{x}_{k+2} & \dots\end{pmatrix}}_{\Psi_{x+}} \approx \begin{bmatrix}\hat{A}_{KF} & \hat{B}_{KF} & \hat{L}\end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & \dots \\ u_k & u_{k+1} & \dots \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \dots\end{pmatrix}}_{\Xi_{KF}}$$

se obtiene **directamente de datos** la estimación de las matrices del filtro de Kalman (observ. adelantado, `dlqe`): $\begin{bmatrix}\hat{A}_{KF} & \hat{B}_{KF} & \hat{L}\end{bmatrix} = \Psi_{x+} \cdot \Xi_{KF}^{\dagger}$.

El valor exacto de dichas matrices, dado un modelo, sería:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_{k+1} - C(A\hat{x}_k + Bu_k)) = \bar{A}_{KF}\hat{x} + \bar{B}_{KF}u + Ly_{k+1}$$

siendo $\bar{A}_{KF} = (I - LC)A$, $\bar{B}_{KF} = (I - LC)B$.

Conclusiones

- El paso principal de la ID subespacio es generar una secuencia de estados estimados a partir de un SVD de cierta matriz obtenida con datos entrada-salida.

- A partir de la secuencia de estados anterior, se pueden identifican directamente **observadores** a partir de datos.

- **No** es necesario estimar matrices de varianza de ruido de proceso/medida Q, R para introducirlas en `dlqe(A,C,G,Q,R)`.