¿Por qué se enfrían antes los dedos que la cara cuando hace frío?

Julio Benítez López
Universidad Politécnica de Valencia
jbenitez@mat.upv.es

Resumen

The purpose of this note is to show s physical application of Vector Calculus.

1. introduce

Dejando aparte cuestiones médicas como el riego sanguíneo o la sudoración, vamos a ver en esta nota la respuesta a la pregunta del título bajo unas hipótesis físicas relativamente razonables.

El origen de la pregunta del título surgió debido a la necesidad de hacer más ameno el análisis vectorial para alumnos de ingeniería. En mi opinión es buena idea explicar los conceptos matemáticos ligados a las ciencias físicas (¡siempre que se pueda y que la dificultad inherente a la física sea pequeña!). Así se produce una interacción entre las matemáticas y la física que ayuda a los estudiantes a comprender conceptos matemáticos complejos. A lo largo de esta nota iremos viendo cómo aparecen ideas tan diversas como el gradiente, la regla de la cadena, curvas en el espacio, el teorema de la divergencia, derivación bajo el signo de la integral, e incluso la desigualdad isoperimétrica.

El orden de exposición de esta nota coincide con el de resolución de la pregunta del título. Como ya se mencionó, la idea original fue mostrar a alumnos de ingeniería algunas aplicaciones sencillas del cálculo vectorial a la física. Una de estas aplicaciones es la **ecuación del calor**. Las referencias de consulta usadas fueron [2, 3, 4]. Se muestra un breve resumen para uniformar la notación y los conceptos usados.

2. preliminares

Supóngase un sólido cuyos puntos no están a la misma temperatura. Sea $T(x, y, z, t)$, diferenciable tantas veces como sea preciso, la temperatura del punto (x, y, z) en el tiempo t. Las partes más frías se calientan y viceversa, y es posible imaginar que hay un "flujo de calor" de la parte más caliente a la más fría. Es natural asumir que la magnitud de este "fluído" es proporcional a la razón de caída de la temperatura. Definimos **el flujo de calor J** mediante

$$\mathbf{J} = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right), \tag{1}$$

donde k es una constante que se supondrá estrictamente positiva.

La constante de proporcionalidad k depende del material y mide su **conductividad térmica**. Para una valor fijo de ∇T, cuando κ aumenta, el módulo de $\mathbf{J}$ también aumenta; luego κ verdaderamente mide la conductividad térmica del material.

La explicación que se suele dar del signo negativo que aparece en (1) es la siguiente: *El calor fluye desde las regiones cálidas hacia las más frías. El vector ∇T apunta de las regiones más frías a las más calientes, es por tanto lógico que* **J** *y* ∇T *tengan signos opuestos.* Sin embargo, no contento con esta explicación de tipo intuitivo el autor se propus pensar en una explicación "más matemática". Y fue la que viene a continuación:

Sea una curva orientada en la dirección del flujo. Es decir $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ que cumple $\alpha'(t) = f(t)\mathbf{J}(\alpha(t))$ para cierta función f positiva. Se puede probar, usando (1), que la función $T(\alpha(t))$ es decreciente; esto es, el calor fluye de la parte más caliente a la más fría. Esto es sencillo si se usa la regla de la cadena, obteniendo $(T \circ \alpha)'(t) = -kf(t)\|\nabla T(\alpha(t))\|^2 < 0$.

Argumentos que involucran a la ley de conservación de la energía junto la integral $\iint_S \mathbf{J}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, donde S es una superficie cerrada, permiten probar la **ecuación del calor** (véase [2, 3, 4]):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \kappa\nabla^2 T, \tag{2}$$

donde $\kappa = k/(c\rho)$, la constante c es el **calor específico** y ρ es la **densidad**.

3. idea central

El teorema de la divergencia es ampliamente usado en las aplicaciones del análisis vectorial. ¿Es posible usar este teorema junto con (2) para deducir alguna consecuencia interesante?

Supóngase que Ω es un sólido tridimensional con frontera S y sea **N** el vector normal unitario exterior a S. Ya que la deducción de (2) se vale de la integral $\iint_S \mathbf{J}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, ahora se partirá de la misma integral junto con (1) y (2):

$$\iint_S \mathbf{J}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{J}\,\mathrm{d}v = (1) = -k\iiint_\Omega \nabla^2 T\,\mathrm{d}v = (2) = -c\rho\iiint_\Omega \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}v.$$

Un paso que en muchas ocasiones se efectúa sin justificar es intercambiar la derivada y la integral. De hecho, en muchos libros de texto en donde se aplica el análisis vectorial a la teoría de campos electromagnéticos ni siquiera se menciona este paso y se considera obvio. En realidad, este paso no es ni mucho menos obvio y es un resultado no trivial de integración. Suponiendo que este paso sea legítimo, entonces

$$\iint_S \mathbf{J}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -c\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\Omega T\,\mathrm{d}v.$$

¿Hay alguna manera más concisa de escribir esta expresión? Si se usa el promedio de una función, la igualdad anterior se escribe como

$$\iint_S \mathbf{J}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -c\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Volumen}(\Omega)\overline{T}) = -c\rho\mathrm{Volumen}(\Omega)\frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

donde $\overline{T}$ indica el promedio de T sobre Ω.

No se puede simplificar más el término derecho. Respecto al izquierdo, es cierto que tampoco se puede simplificar más. Sin embargo se puede simplificar bajo hipótesis razonables.

A partir de ahora se supondrá que **J** es perpendicular a la superficie S y que el módulo de **J** es constante, sea J (lo que significa que el calor "se escapa" de manera "constante", ya que $\|\mathbf{J}\|$ es constante, y de modo máximo, pues si **J** no fuera perpendicular a la superficie, entonces $\langle \mathbf{J}, \mathbf{N} \rangle < J$). Entonces se cumple que $\langle \mathbf{J}, \mathbf{N} \rangle = J$, por lo que $\iint_S \mathbf{J}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = J \text{Área}(S)$. Luego, por (3)

$$\frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}t} = -\frac{J}{c\rho} \frac{\text{Área}(S)}{\text{Volumen}(\Omega)}. \tag{4}$$

Esta relación nos dice que los cuerpos que más pierden calor son aquellos en los que el cociente Área(S)/Volumen(Ω) es lo más grande posible.

¿Qué objetos tienen este cociente más grande? Esta cuestión está íntimamente relacionada con el **problema isoperimétrico** en tres dimensiones.

El problema isoperimétrico ha sido conocido desde la antigüedad. Puede ser enunciado de la siguiente manera: *Entre todas las curvas planas con el mismo perímetro, demuéstrese que la circunferencia es la que encierra mayor área.* Este problema se puede resolver por medio de la **desigualdad isoperimétrica**: Denotemos el perímetro y área de una curva plana por L y A, respectivamente, entonces $L^2 \geq 4\pi A$. La igualdad sólo se mantiene para la circunferencia.

La desigualdad isoperimétrica puede ser generalizada para espacios de dimensión más grande. Por ejemplo, si V es el volumen encerrado por una superficie cerrada con área A, entonces $A^3 \geq 36\pi V^2$. La igualdad sólo se cumple para la esfera. En [1] se explica de una manera amena el problema isoperimétrico.

Luego un objeto cuanto "más esférico" sea, el cociente Área/Volumen es menor. Y por tanto $\mathrm{d}\overline{T}/\mathrm{d}t$ (en módulo) es menor. Es decir, que un objeto cuanto más redondeado sea, pierde menos calor. Lo que responde a la pregunta planteada en el título de esta nota. Otra forma de comprender este resultado es observando que en un objeto, cuanto mayor sea la superficie en relación a su volumen, el calor "tiene más sitio por donde escaparse".

Llegado a este punto, el autor se sintió satisfecho de que con unas matemáticas relativamente sencillas se pueda demostrar algo bastante evidente desde el punto físico (¡sobre todo en invierno!) y poder relacionar dos mundos, el físico y el matemático, algunas veces bastante desconectados. Sin embargo, tras repasar los cálculos se observó que había un error. ¿Cuál? y ¿cómo se descubrió? De la ecuación (4) se deduce claramente que $\mathrm{d}\overline{T}/\mathrm{d}t < 0$, lo que indica que el cuerpo se enfría. Y esto no siempre es cierto. ¡Los objetos se pueden calentar!

La explicación consiste en que bajo las hipótesis previas se tiene en realidad que $\langle \mathbf{J}, \mathbf{N} \rangle = \pm J$, dependiendo del sentido de $\mathbf{J}$. Si se elige el signo positivo, entonces $\mathbf{J}$ tiene el mismo sentido que $\mathbf{N}$, es decir, $\mathbf{J}$ es exterior a S y por tanto el calor va desde dentro hacia fuera, y por tanto es lógico que el cuerpo pierda calor. Si se elige el signo negativo, entonces $\mathbf{J}$ es interior a S, el calor va desde fuera adentro y el cuerpo gana calor.

Referencias

[1] S. Hildebrandt y A. Tromba. (1990), *Matemática y formas ṕtimas.* Prensa Cientfica, (Biblioteca Scientific American).

[2] J. E. Marsden y A. J. Tromba. (1998), *Cálculo Vectorial.* Addison Wesley Longman.

[3] R. Snieder. (2001), *Mathematical Methods for the Physical Sciences.* Cambridge University Press.

[4] M. Spivack (1970), *A comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol V.* Brandeis University