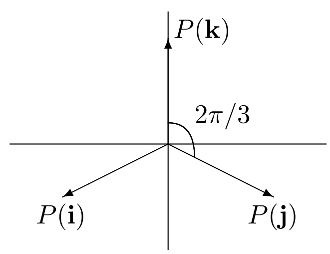
Algunos problemas de aplicaciones lineales

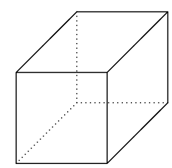
1 Uno de los principales problemas en el diseño gráfico es cómo dibujar objetos tridimensionales en el papel o en la pantalla del ordenador. O expresado de forma matemática: dado $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3$, ¿qué coordenadas $(x', y')^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2$ debe tener el punto que representa a $\mathbf{x}$ en el plano? Es decir, tenemos una aplicación (proyección) $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuyo significado es el siguiente: $P(\mathbf{x})$ es dónde se tiene que dibujar el punto $\mathbf{x}$.



La **proyección isométrica** es muy usada en el diseño gráfico. Esta aplicación cumple:

- Es una aplicación lineal.
- $P(\mathbf{i}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{t}}$, $P(\mathbf{j}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{t}}$ y $P(\mathbf{k}) = (0, 1)^{\mathrm{t}}$, en donde $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

1. Halle la matriz de esta aplicación en las bases canónicas.
2. Calcule $P(\mathbf{x})$ para un punto arbitrario $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Calcule el núcleo de P y su dimensión. ¿Cuál es el significado geométrico del núcleo de P?
4. Dados dos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ de $\mathbb{R}^3$, ¿qué condición necesaria y suficiente deben cumplir $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ para que sean dibujados en el mismo lugar?
5. Los vértices del cubo unidad son $\mathbf{0}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. ¿Qué figura geométrica resulta si proyectamos el cubo unidad?
6. Estudie qué proyección se ha de usar si se quiere dibujar el cubo unidad como se muestra:



2 En este problema se hallará la proyección P sobre un plano que pasa por el origen. Puesto que calcular $P(\mathbf{i})$, $P(\mathbf{j})$ ó $P(\mathbf{k})$ es complicado, en este caso es más fácil utilizar la base de $\mathbb{R}^3$ formada por $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}\}$, siendo $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ una base del plano y $\mathbf{n}$ un vector normal al plano de norma 1. Sea A es la matriz de P en las canónicas. Observe que $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ y $A\mathbf{n} = \mathbf{0}$.

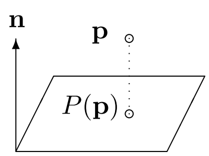
1. Deduzca que $A[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0}]$. Diga la razón de que la matriz $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}]$ sea invertible. Observe que se puede despejar la matriz A.
2. Considere el plano $x + y = z$ y tome $\{(1, 0, 1)^{\mathrm{t}}, (0, 1, 1)^{\mathrm{t}}\}$ como base del plano. Calcule la matriz A usando el apartado previo. ¿Dónde se proyecta un punto $(x, y, z)^{\mathrm{t}}$?
3. Observe que en el segundo apartado ha tenido que calcular la inversa de una matriz. El cálculo de la inversa de una matriz **siempre** se ha de evitar si hay otras alternativas. En este apartado veremos una manera de hallar la matriz de proyección sin calcular ninguna inversa. Si se cogen los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$ perpendiculares entre sí y de norma 1, pruebe

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\mathrm{t}} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{t}} \\ \mathbf{n}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{n} \end{bmatrix} = I$$

y deduzca que $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{t}} + \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{t}}$.

4. Calcule ahora la matriz de proyección para el plano $x + y = z$ usando el apartado anterior.

5. Vamos a hallar en este problema la matriz de proyección de otro modo distinto. Sea $\mathbf{n}^{\mathrm{t}}\mathbf{x} = 0$ la ecuación del plano, en donde $\mathbf{n}$ es un vector normal que se puede tomar unitario. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ arbitrario y $P(\mathbf{p})$ su proyección. Mire la figura.



Puesto que la recta que une $\mathbf{p}$ y $P(\mathbf{p})$ es perpendicular al plano, se tiene que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P(\mathbf{p}) - \mathbf{p} = \lambda\mathbf{n}$. Use ahora que $P(\mathbf{p})$ cumple la ecuación del plano para hallar λ (en función de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{n}$) e inserte este valor en $P(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{n}$ para probar que $P(\mathbf{p}) = (I - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{t}})\mathbf{p}$.

6. Calcule ahora la matriz de proyección para el plano $x + y = z$ usando el apartado anterior.

7. ¿Cómo se pueden modificar los planteamientos de los apartados 1, 3 y 5 para encontrar la simetría respecto de un plano que pasa por el origen?

3 En este problema vamos a usar las aplicaciones lineales para estudiar una ecuación diferencial. En concreto, se van a encontrar los polinomios $p \in \mathcal{P}_2$ que cumplen

$$p''(x) - 2xp'(x) + 4p(x) = q(x),$$

para un $q \in \mathcal{P}_2$ dado. Se define $\Phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ como $\Phi(y) = y''(x) - 2xy'(x) + 4y(x)$.

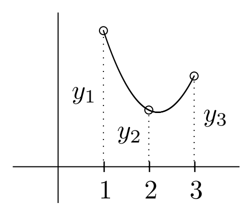
1. Halle la matriz de Φ en las canónicas.

2. Halle usando el apartado anterior los polinomios $p \in \mathcal{P}_2$ tales que $\Phi(p) = x^2 - 1$ (el planteamiento permite substituir $x^2 - 1$ por cualquier otro polinomio de $\mathcal{P}_2$).

3. ¿Qué debe verificar $q \in \mathcal{P}_2$ para que exista $p \in \mathcal{P}_2$ tal que

$$p''(x) - 2xp'(x) + 4p(x) = q(x)?$$

4 Ahora vamos a resolver un problema de **interpolación**. En concreto vamos a hallar todos los polinomios $p \in \mathcal{P}_2$ tales que $p(1) = y_1$, $p(2) = y_2$ y $p(3) = y_3$ para $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ dados. Para ello se se define $\Phi : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, como $\Phi(q) = (q(1), q(2), q(3))^{\mathrm{t}}$, y observe que el problema planteado equivale a resolver $\Phi(p) = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{t}}$.



1. Halle la matriz de Φ en las canónicas. Use esta matriz para resolver el problema.

2. Halle la matriz de Φ, pero ahora considerando $\{1, x-1, (x-1)(x-2)\}$ como base inicial y la canónica de $\mathbb{R}^3$ como base final. Use esta matriz para resolver el problema. ¿Cuál de las dos matrices es más cómoda de usar?

5 En este problema vamos a encontrar las llamadas **fórmulas de cuadraturas de Simpson y de Gauss** que sirven para calcular de forma aproximada integrales definidas. Se definen las dos siguientes aplicaciones de $\mathcal{P}_n$ a $\mathbb{R}$ (se puede demostrar fácilmente que son lineales)

- $L_n(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x$,
- $T_n(p) = w_0 p(x_0) + \cdots + w_k p(x_k)$,

donde $w_0, \ldots, w_k \in \mathbb{R}$ y $x_0, \ldots, x_k \in [-1, 1]$.

1. Halle las matrices de L_n y T_n en las canónicas y denótelas, respectivamente, $M(L_n)$ y $M(T_n)$.

2. Fuerce $M(L_n) = M(T_n)$ para $n = 2$, $k = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Halle w_0, w_1 y w_2. Acaba de obtener la fórmula de Simpson.

3. Tras forzar $M(L_n) = M(T_n)$ para $n = 3$, $k = 1$ debe obtener cuatro ecuaciones. Considere como incógnitas w_0 y w_1 e investigue los valores x_0 y x_1 para los cuales este sistema es compatible. Halle w_0 w_1. Acaba de obtener la fórmula de Gauss. Ayuda: en algún momento debe usarse la fórmula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Thomas Simpson, 1710–1761.
Homer Simpson, 1987–.
Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.

Nota: Por el apartado 2, como las matrices coinciden, las aplicaciones coinciden; luego

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x = w_0 p(-1) + w_1 p(0) + w_2 p(1), \quad (1)$$

para todo $p \in \mathcal{P}_2$, siendo w_0, w_1 y w_2 los valores encontrados en el apartado 2. En realidad se tiene

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq w_0 f(-1) + w_1 f(0) + w_2 f(1),$$

donde f es una función que se comporta "razonablemente" bien.

La fórmula de Gauss es aún mejor que la de Simpson. La idea es la siguiente: por el apartado 3 se tiene

$$\int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x = w_0 p(x_0) + w_1 p(x_1), \qquad (2)$$

para todo $p \in \mathcal{P}_3$, siendo w_0, w_1, x_0 y x_1 los valores encontrados en el apartado 3. Aparte que (2) requiere menos operaciones que (1), la fórmula de Gauss es válida para polinomios de grado más alto y parece razonable que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

sea más precisa que la fórmula correspondiente de Simpson.

6 En este problema vamos a calcular (sin apenas usar cálculo diferencial) la primitiva de la función $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$. Es claro que la integral indefinida es el proceso contrario de la derivación y también debe ser claro que la derivación es mucho más simple que la integración; por lo que nos vamos a concentrar en la derivación. Sea $\mathcal{V}$ el espacio generado por las funciones $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ (observe que $\dim(\mathcal{V}) = 2$) y se define $D : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ dada por $D(f) = f'$.

1. Halle la matriz de D en la base $\{\mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$. Sea A esta matriz

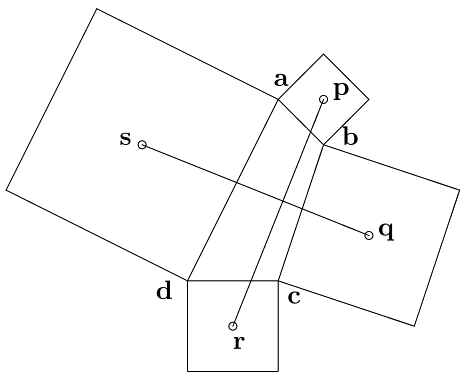
2. Pruebe que $AA^{\mathrm{t}} = kI$ para un determinado escalar k que debe expresar en función de a y b. Aproveche este apartado para hallar A^{-1} sin calcular nada.

3. Use los apartados anteriores para hallar las funciones $f(x)$ de $\mathcal{V}$ tales que $D(f) = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$. Observe que está calculando la integral indefinida $\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x$.

4. ¿En qué cambian los apartados anteriores si se toma ahora $\mathcal{V}$ como el espacio generado por $1, \mathrm{e}^{ax}\cos(bx), \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen}(bx)$?

5. Calcule la integral indefinida de $x^2\mathrm{e}^x$ usando las ideas previas.

7 Las aplicaciones lineales sirven también para demostrar resultados geométricos. Como problema guiado incluimos el siguiente teorema (de **Von Aubel**): *Si sobre los lados de un cuadrilátero se levantan cuadrados y se unen los centros correspondientes a los lados no adyacentes se obtienen dos segmentos perpendiculares y de la misma longitud.*



Sea J el giro de ángulo $\pi/2$ centrado en el origen y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ los vértices del cuadrilátero. Los centros de los cuadrados son

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{a}+J(\mathbf{b}-\mathbf{a})}{2},\ \mathbf{q} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{b}+J(\mathbf{c}-\mathbf{b})}{2},$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{d}+\mathbf{c}+J(\mathbf{d}-\mathbf{c})}{2},\ \mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}+J(\mathbf{a}-\mathbf{d})}{2}.$$

1. ¿Por qué los puntos $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ se pueden calcular usando las expresiones de arriba?
2. ¿Por qué para probar el teorema de Von Aubel basta demostrar $J(\mathbf{q}-\mathbf{s}) = \mathbf{p}-\mathbf{r}$?
3. Pruebe $J(\mathbf{q}-\mathbf{s}) = \mathbf{p}-\mathbf{r}$ usando $J^2 = -I$.

8 El objetivo de este problema es hallar los valores de α de modo que la ecuación (de **Hermite**)

$$y''(x) - 2xy'(x) + \alpha y(x) = 0$$

admita soluciones polinómicas no nulas. Para ello se define $\Phi_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ dado por

$$\Phi(p) = p''(x) - 2xp'(x) + \alpha p(x).$$

1. Halle la matriz de Φ en las canónicas.
2. ¿Para qué valores de α la aplicación Φ deja de ser biyectiva?
3. Observe la relación entre el segundo apartado y la existencia de soluciones polinómicas no nulas de la ecuación de Hermite.
4. Para $\alpha = 4$ encuentre todas las soluciones polinómicas de la ecuación de Hermite.

Charles Hermite, 1822–1901.

9 Considere las siguientes funciones continuas definidas a trozos:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0 \\ 0 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \le x \le 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Sea $\mathcal{H}$ el espacio generado por estas tres funciones independientes. Se define la aplicación lineal $T : \mathcal{C}([-1,1]) \to \mathcal{H}$ dada por $T(f) = f(-1)\phi_1 + f(0)\phi_2 + f(1)\phi_3$.

1. Represente en una misma gráfica $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ y $T(f)$. Haga lo mismo para $f(x) = e^x$. ¿Qué hace el operador T?
2. ¿Es T inyectiva?
3. Se define T_n la restricción de T a $\mathcal{P}_n$. Halle la matriz de T_n si se considera como base inicial la canónica de $\mathcal{P}_n$.
4. ¿Para qué valores de n la aplicación T_n es inyectiva¿, ¿y sobreyectiva?
5. Halle el núcleo de T_n para $n \le 4$.