Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \cdots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

donde los a_{ij}, b_i son números conocidos y x_i son números desconocidos (incógnitas). Obsérvese que no excluímos la situación $m \neq n$.

Usando matrices queda de forma más compacta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

O más abreviado

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Lo que no se debe hacer:

- Resolverlo $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
  - Quizás A no sea cuadrada.
  - Si A es cuadrada, quizás A no sea invertible.
  - Aún en el caso que se halle A^{-1} de forma eficiente (método de Jordan-Gauss), el cálculo de A^{-1} tiene más operaciones que el algoritmo de Gauss.
- Emplear la regla de Cramer (es una fórmula numéricamente inestable)
- Usar el Teorema de Rouché–Frobenius (sólo proporciona existencia o unicidad; y no las soluciones).

Algoritmo de Gauss

Tiene dos partes diferenciadas: **Triangularización regresiva** y **substitución regresiva**. Veamos la más sencilla de las dos con un ejemplo:

Ejemplo de substitución regresiva. Considérese el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 6 \\ -y + z &= 1 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Poco cuesta resolverlo: de la tercera tenemos $z = 2$, de la segunda tenemos $y = z - 1 = 1$ y de la primera $x = 6 - y - 2z = 1$.

Ésta en realidad es la segunda fase del algoritmo de Gauss. La primera fase es la triangularización: consiste en hacer triangular un sistema de ecuaciones matriciales a través de operaciones

$$\text{Fila } i \ \rightarrow \text{Fila } i + \lambda * \text{Fila } j. \tag{1}$$

Veamos un ejemplo: resuélvase

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

Lo primero lo ponemos usando “la matriz ampliada”

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\large 1} & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Tenemos que hacer ceros debajo del 1 marcado: para ello hacemos

$$2^{\underline{a}} \text{ Fila } \rightarrow \ 2^{\underline{a}} \text{ Fila} - 1^{\underline{a}} \text{ Fila}$$

y

$$3^{\underline{a}} \text{ Fila } \rightarrow \ 3^{\underline{a}} \text{ Fila} - 2 * 1^{\underline{a}} \text{ Fila}.$$

Teniendo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos vamos a esforzar en (siempre que podamos) hacer sólo operaciones del tipo (1).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{\large -2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Marcamos el -2 e intentamos hacer ceros por debajo de esta entrada: para ello hacemos

$$3^{\underline{a}} \text{ Fila } \rightarrow \ 3^{\underline{a}} \text{ Fila} - \frac{1}{2} * 2^{\underline{a}} \text{ Fila},$$

obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El sistema ya triangularizado, queda

$$\begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ -2y &= -2 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Es trivial obtener la solución por substitución regresiva: $z = 2$, $y = 1$, $x = 4 - y - z = 1$.

Veamos un úlimo ejemplo: Resuélvase

$$\begin{aligned} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \\ 2x+3y &= 5 \end{aligned}$$

Vemos que no es necesario que el sistema sea cuadrado para resolverlo usando el algoritmo de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aquí hemos efectuado

$$2^{\underline{a}}\ \text{Fila} \ \to\ 2^{\underline{a}}\ \text{Fila} - 1^{\underline{a}}\ \text{Fila}$$

y

$$3^{\underline{a}}\ \text{Fila} \ \to\ 3^{\underline{a}}\ \text{Fila} - 2 * 1^{\underline{a}}\ \text{Fila}.$$

Ahora hacemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en donde hemos hecho

$$3^{\underline{a}}\ \text{Fila} \ \to\ 3^{\underline{a}}\ \text{Fila} + \frac{1}{2} * 2^{\underline{a}}\ \text{Fila}.$$

Escribimos el sistema ya triangularizado:

$$\begin{aligned} x+y &= 2 \\ -2y &= -2 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es obvia: $y = 1$, $x = 1$.

Pero, ¿a qué se debe una fila de ceros?

Que la tercera ecuación del sistema original es combinación de las restantes, o dicho de otra manera: la tercera ecuación es redundante.