1 Propiedades del determinante de una matriz cuadrada

- El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta. A partir de ahora todas las propiedades que se refieran a filas, son válidas para columnas.
- Si B se obtiene de A multiplicando una fila por λ, entonces $\det(B) = \lambda \det(A)$. En general $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, siendo n el orden de la matriz A.
- Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
- Si una matriz tiene dos filas iguales, entonces su determinante es nulo.
- El determinante de una matriz que tenga una de sus filas como suma de dos se puede descomponer como suma de dos determinantes del modo siguiente:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

  No hay que confundir esta propiedad con la siguiente igualdad, que es falsa en general: $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- Si una matriz tiene una fila de ceros, entonces su determinante es nulo.
- Si B se obtiene de A sumándole o restándole una fila de A un múltiplo de otra fila, entonces $\det(A) = \det(B)$.
- Si A es una matriz triangular entonces el determinante de A es el producto de los términos de su diagonal principal. En particular el determinante de I es 1.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

2 Inversa de una matriz cuadrada

Motivación: Para resolver $ax = b$, donde $a, x, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, despejamos $x = a^{-1}b$, siendo a^{-1} un número tal que $a^{-1}a = 1$.

Ya que el producto de matrices no es conmutativo, hay que tener cuidado con la definición. Decimos que una matriz A es <u>invertible</u> si existe otra matriz B tal que $AB = BA = I$. Observamos que de la definición se deduce que sólo las matrices cuadradas pueden ser invertibles (pero no todas las matrices cuadradas son invertibles). Asimismo, se puede demostrar que la inversa de una matriz invertible A es única, esta matriz única se denotará A^{-1}. Debido a la no conmutatividad del producto, la división matricial no tiene sentido: ¿qué es A/B? ¿es $B^{-1}A$ ó AB^{-1}?

$$\text{NO USAR JAMÁS } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A^{\mathrm{t}}),$$

siendo $\mathrm{Adj}(B)$ la matriz cuadrada del mismo orden que B cuyo elemento (i, j) es el determinante de la submatriz que resulta de quitar la fila i y la columna j de B.

- Una matriz A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- Si A y B son invertibles entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A y B son invertibles entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible y $\lambda \neq 0$ entonces λA es invertible y $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.
- Si A es invertible, entonces A^{t} es invertible y $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$.