Errores frecuentes en las ecuaciones diferenciales

Julio Benítez López

1 Preliminares

1. Propiedades elementales de la exponencial y el logaritmo. Ejemplos:

$$\log(xy) \neq \log(x)\log(y), \quad \log(x+y) \neq \log(x)+\log(y), \quad \log(x+y) \neq \log(x)\log(y).$$

$$\log(xy) = \log(x)+\log(y), \qquad \log(x^\alpha) = \alpha\log(x), \qquad \log(1) = 0.$$

$$\mathrm{e}^{xy} \neq \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y, \quad \mathrm{e}^{x+y} \neq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y, \quad (\mathrm{e}^x)^y \neq e^{x^y}.$$

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y, \quad (\mathrm{e}^x)^y = e^{xy}, \quad \mathrm{e}^0 = 1, \quad \mathrm{e}^{\alpha\log x} = x^\alpha.$$

2. Cancelaciones “milagrosas” del logaritmo. Ejemplos:

$\log y = \log(f(t)) + C,\ C \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad y = f(t) + C$ **es erróneo**.

$\log y = \log(f(t)) + C,\ C \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \log y = \log(\mathrm{e}^C f(t)) \ \Rightarrow\ y = e^C f(t)$ **es correcto**.

$\log y = \log(f(t)) + C,\ C \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ y = Kf(t),\ K \in \mathbb{R}$ **es correcto**.

$\log u = -\log v \ \Rightarrow\ u = -v$ **es erróneo**.

$\log u = -\log v \ \Rightarrow\ u = v^{-1}$ **es correcto**.

3. Olvidarse de la constante de integración. Ejemplo:

$$\int x^2 \mathrm{d}x \neq \frac{x^3}{3}, \qquad \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

4. No se puede dividir por 0.

5. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ y si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $f(x_0)$ es siempre una constante. Por lo que de la expresión $g'(x_0) = \alpha$ no se puede deducir prácticamente nada. Ejemplo: el siguiente razonamiento está vacío de contenido:

$$g'(5) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g(5) \text{ es constante.}$$

Pues ¡$g(5)$ **siempre** es una constante!

2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Preste atención a los paréntesis. Ejemplos:

   a) $(\mathrm{e}^y + 2t)\mathrm{d}t + t\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^y + 2t \cdot \mathrm{d}t = -t\mathrm{e}^y\mathrm{d}y \Rightarrow \dfrac{2t}{-t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y\mathrm{d}y.$

   Mal. Observe que $(\mathrm{e}^y + 2t)\mathrm{d}t \neq \mathrm{e}^y + 2t \cdot \mathrm{d}t$. Debe fijarse si en una expresión con diferenciales todos los sumandos "son del mismo orden infinitesimal"; por ejemplo, en $\underline{\mathrm{e}^y} + 2t \cdot \mathrm{d}t = -t\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$ es claro que sólo e^y es un término que no es infinitesimal, mientras que los restantos sí lo son. Por lo que debe haber un error.

   b) $x \int \cos x\mathrm{d}x \neq x \operatorname{sen} x + C$. Sin embargo, $x \int \cos x\mathrm{d}x = x\,(\operatorname{sen} x + C) = x \operatorname{sen} x + Cx$.

2. Separe bien las constantes en las ecuaciones de variables separables. Ejemplos:

   a) Resuelva $y' = y$.

   a.i) $y' = y \Rightarrow \int y' = \int y$.

   Mal. ¿Con respecto a qué variable se integra?

   a.ii) $y' = y \Rightarrow y = \int y\mathrm{d}y = \dfrac{y^2}{2} + C.$

   Mal. ¿Cómo se pasa de $y' = y$ a $y = \int y\mathrm{d}y$? Desde luego, $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$.

   a.iii) $y' = y \Rightarrow y'\mathrm{d}t = y\mathrm{d}t \Rightarrow \int y'\mathrm{d}t = \int y\mathrm{d}t \Rightarrow y = yt + C$ (puesto que $\int y\mathrm{d}t = y\int \mathrm{d}t = yt + C$).

   Mal. La razón es que en realidad, y es una función de t, es decir $y = y(t)$. Por tanto $\int y\mathrm{d}t = \int y(t)\mathrm{d}t \neq y(t)\int \mathrm{d}t$, ya que $y(t)$ "no puede salir fuera de la integral".

   a.iv) $y' = y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \Rightarrow \mathrm{d}y = y\mathrm{d}t \Rightarrow y = \int y\mathrm{d}t = \dfrac{y^2}{2} + C.$

   Mal. La razón es la misma que antes: y es una función de t y por tanto $\int y\mathrm{d}t \neq y^2/2 + C$. Otra cosa distinta es $\int t\mathrm{d}t = t^2/2 + C$.

   a.v) $y' = y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}t \Rightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}t \Rightarrow \log y = t + C \Rightarrow y = \mathrm{e}^{t+C} = Ke^t.$

   Correcto.

   b) Resuelva $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y-t}{y+t}$.

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y-t}{y+t} \Rightarrow (y+t)\mathrm{d}y = (y-t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int(y+t)\mathrm{d}y = \int(y-t)\mathrm{d}t \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} + ty = yt - \dfrac{t^2}{2} + C.$

   Mal. Mire a.iii) y a.iv) del ejemplo anterior.

   c) Resuelva $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y-1}{y+1}$.

   $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{y-1}{y+1} \Rightarrow \mathrm{d}y = \dfrac{y-1}{y+1}\mathrm{d}t \Rightarrow y = \int \dfrac{y-1}{y+1}\mathrm{d}t + C.$

   En principio, lo anterior es correcto; pero totalmente infructuoso. La razón es que como ya se ha comentado, $y = y(t)$; y por tanto $\int \dfrac{y-1}{y+1}\mathrm{d}t$ es incalculable si no se conoce a priori $y(t)$. Pero conocer $y(t)$ es el objetivo de la ecuación diferencial. Otra cosa distinta es $\int \dfrac{y-1}{y+1}\mathrm{d}y$, que es una integral que sí se puede calcular: $\int \dfrac{y-1}{y+1}\mathrm{d}y = \int \dfrac{y+1-2}{y+1}\mathrm{d}y = \int(1 - 2\dfrac{1}{y+1})\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y - 2\int \dfrac{1}{y+1}\mathrm{d}y = y - 2\log(y+1) + C.$

La ecuación anterior se resolvería de la siguiente manera: $\frac{y+1}{y-1}\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$...

3. No mezcle tres variables en una ecuación diferencial. Ejemplo: la ecuación $y' = \frac{y-t}{y+t}$ es homogénea (la prima denota derivación respecto a t) puesto que $y' = \frac{y-t}{y+t} = \frac{(y-t)/t}{(y+t)/t} = \frac{\frac{y}{t}-1}{\frac{y}{t}+1}$, por lo que se hace el cambio $u = y/t$. En rigor, lo siguiente es correcto:

$$y' = \frac{u-1}{u+1}.$$

Pero ¡cuidado! la expresión anterior puede conducir a errores graves. Los tres siguientes argumentos son erróneos

$$y' = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow y = \int \frac{u-1}{u+1} = \cdots \qquad \text{¿Cuál es la variable de integración?}$$

$$y' = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow y = \int \frac{u-1}{u+1}\underline{\mathrm{d}y} = \frac{u-1}{u+1}y + C = \frac{y/t-1}{y/t+1}y + C \qquad u = u(y)!$$

$$y' = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u-1}{u+1} \Rightarrow y = \int \frac{u-1}{u+1}\mathrm{d}t = \frac{u-1}{u+1}t + C = \cdots \qquad u = u(t)!$$

En realidad, en la expresión $y' = \frac{u-1}{u+1}$ hay **tres** variables: y, u; pero también t (viene "camuflada" en $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$).

Un consejo: emplee únicamente expresiones en donde aparezcan dos únicas variables.

Así en el ejemplo anterior $y' = \frac{u-1}{u+1}$. Como

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(ut)}{\mathrm{d}t} = \frac{u\mathrm{d}t + t\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u + t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

obtenemos

$$u + t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{u-1}{u+1}.$$

Ahora sí aparecen sólo dos variables u, t.

4. Cuando haga un cambio de variable, ¡no olvide de deshacerlo!

Ejemplo: La ecuación $t^2y'' + y = 0$ es una ecuación de Euler-Cauchy (las primas denotan derivación respecto a t). Esta tipo de ecuaciones se resuelve mediante el cambio de variables $t = \mathrm{e}^x$. Como $ty' = \dot{y}$, $t^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$ (los puntos denotan derivación respecto a x) entonces la ecuación se convierte en $\ddot{y} - \dot{y} + y = 0$. El polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, cuyas raíces son $1/2 \pm \sqrt{3}/2\mathrm{j}$.

Primer fallo $y = C_1\mathrm{e}^{t/2}\cos(\sqrt{3}/2t) + C_2\mathrm{e}^{t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}/2t)$. La variable de la última ecuación es x y no es t.

Segundo fallo $y = C_1\mathrm{e}^{x/2}\cos(\sqrt{3}/2x) + C_2\mathrm{e}^{x/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}/2x)$. ¡Hay que deshacer el cambio!

Bien hecho $y = C_1\mathrm{e}^{x/2}\cos(\sqrt{3}/2x) + C_2\mathrm{e}^{x/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}/2x)$. Como $x = \log t$, entonces

$$\begin{aligned} y &= C_1\mathrm{e}^{\log t/2}\cos(\sqrt{3}/2\log t) + C_2\mathrm{e}^{\log t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}/2\log t) \\ &= C_1\sqrt{t}\cos(\sqrt{3}/2\log t) + C_2\sqrt{t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}/2\log t). \end{aligned}$$

3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

1. Recuerde que la ecuación $\lambda^2 = 1$ tiene dos soluciones: $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Por lo que la ecuación $y'' = y$ tiene dos soluciones independientes $y_1 = \mathrm{e}^t$ e $y_2 = \mathrm{e}^{-t}$.

2. Recuerde que la solución general de la ecuación homogénea lineal de orden n se escribe como $y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$, siendo $C_1, \ldots, C_n$ constantes reales arbitrarias e $y_1, \ldots, y_n$ soluciones independientes de la ecuación difeencial. Ejemplos.

   a) $y'' = 4y$: Como su polinomio característico es $\lambda^2 = 4$, entonces $\lambda = 2$, y por tanto la solución de la ecuación diferencial es $y = C\mathrm{e}^{2t}$.

      Mal: Observe el punto 1. Además, la ecuación es de segundo orden y deben aparecer dos constantes de integración.

   b) $y'' = 4y$: Como su polinomio característico es $\lambda^2 = 4$, entonces $\lambda = 2$ es una raíz doble. Por tanto la solución de la homogénea es $y = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\mathrm{e}^{2t}$.

      Mal. $\lambda = 2$ no es una raíz doble de $\lambda^2 = 4$ (hay otra raíz que es $\lambda = -2$).

   c) $y'' = 4y$: Como su polinomio característico es $\lambda^2 = 4$, entonces $\lambda = 2$. Una solución de la homogénea es $y_1 = \mathrm{e}^{2t}$. Como en la solución de la homogénea deben aparecer dos constantes y $y_2(t) = \mathrm{e}^t$ es una solución de la homogénea, entonces la solución de la homogénea es $y(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{2t}$

      Mal. Las soluciones que aparecen en la solución general de la homogénea deben ser independientes. Es claro que y_1 e y_2 no son independientes. Además, suponiendo que la solución fuera $y(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{2t}$, entonces $y(t) = (C_1 + C_2)\mathrm{e}^{2t} = K\mathrm{e}^{2t}$. Debe observar que en realidad, $y(t)$ depende de una constante arbitraria y no de dos constantes.

   d) $y'' = 4y$: Como su polinomio característico es $\lambda^2 = 4$, cuyas raíces son $\lambda = \pm 2$. Luego la solución general de la homogénea es $y(t) = y(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$.

      Bien.

   e) $y''' = y$: Como su polinomio característico es $\lambda^3 = 1$, entonces $\lambda = \sqrt[3]{1} = 1$, y por tanto la solución de la ecuación diferencial es $y = C\mathrm{e}^t$.

      Mal. Por mucho que la calculadora nos proporciona $\sqrt[3]{1} = 1$; ¡nos está engañando! De hecho, la ecuación $\lambda^3 = 1$ tiene 3 soluciones, una de éstas es $\lambda = 1$, mientras que las otras dos son complejas.

      Una situación parecida es cuando se quiere hallar los valores de x tales que $\operatorname{sen} x = 0$. Por mucho que la calculadora nos de el valor $x = \operatorname{arcsen} 0 = 0$, en realidad de $\operatorname{sen} x = 0$, se deduce que $x = n\pi$, siendo n un entero arbitrario.

3. En el método de los coeficientes indeterminados para hallar una solución particular hay que fijarse bien en la conjetura. Debemos fijarnos bien si obtenemos incongruencias o sistemas incompatibles. Si esto ocurriese, lo más probable es haber realizado una mala conjetura.

   Ejemplo. Hallar una solución particular de $y'' - 2y' + y = 1 + \mathrm{e}^{2t}$.

   a) Conjeturo $y_p = A\mathrm{e}^{2t}$. Como $y_p' = 2A\mathrm{e}^t$, $y_p'' = 4A\mathrm{e}^{2t}$, entonces de $y_p'' - 2y_p' + y_p = 1 + \mathrm{e}^{2t}$ obtengo $4A\mathrm{e}^{2t} - 2 \cdot 2A\mathrm{e}^t + A\mathrm{e}^{2t} = 1 + \mathrm{e}^{2t}$; es decir $A\mathrm{e}^{2t} = 1 + \mathrm{e}^{2t}$.

      Error 1 Igualo coeficientes en e^{2t} y obtengo $A = 1$.

      Error 2 Despejo A y obtengo $A = (1 + \mathrm{e}^{2t})/\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{-2t} + 1$.

      Los dos procedimientos anteriores son erróneos.

      El primero, porque si se igualan coeficientes se deben igualar **todos** los coeficientes obteniéndose

      Coeficiente independiente $\rightarrow$ $0 = 1$
      Coeficiente de e^{2t} $\rightarrow$ $A = 1$

Obviamente es incompatible.

El segundo, por que al conjeturar $y_p = Ae^{2t}$ y a la hora de obtener $y_p' = 2Ae^{2t}$, $y_p'' = 4Ae^{2t}$ se ha supuesto que A es una constante, y se ha obtenido $A = e^{-2t} + 1$, que obviamente no es constante.

La forma correcta de conjeturar es $y_p = A + Be^{2t}$, siendo A y B constantes reales por determinar.

4. En los problemas de diferencias finitas hay dos errores típicos.

Ejemplo: Resolver $y''(t) + y(t) = 0$ para $0 < t < 1$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ tomando $h = 1/2$.

Como $h = 1/2$, el intervalo $[0, 1]$ se divide en dos trozos y los nodos son $t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$ y $t_2 = 1$. Las incógnitas son $y_0 = y(t_0) = y(0)$, $y_1 = y(t_1) = y(1/2)$ e $y_2 = y(t_2) = y(2)$. Recordemos que se pueden usar las aproximaciones

$$y'(t) \simeq \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \quad y'(t) \simeq \frac{y(t) - y(t-h)}{h}, \quad y'(t) \simeq \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h}, \tag{1}$$

siendo la más precisa de estas tres, la última. Además

$$y''(t) \simeq \frac{y(t+h) + y(t-h) - 2y(t)}{h^2}. \tag{2}$$

Es claro que si se substituye $t = 1/2$ en la ecuación diferencial y se aproxima $y''(1/2)$ usando (2) se obtiene

$$\frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{h^2} + y_1 = 0. \tag{3}$$

Tenemos tres incógnitas y una ecuación. ¿Cómo seguir?

Un error: Inventarse los valores de y_0 y de y_2. Muchas veces se ve que $y(a) = y(b) = 0$, siendo a, b los extremos del intervalo. Pero esto es erróneo, ya que no hay nada que nos asegure que, en este ejemplo, $y(0) = y(1) = 0$. Observe que $y'(0) = 0$ no es lo mismo que $y(0) = 0$.

Otro error: Trabajar fuera del intervalo. En este ejemplo, el intervalo donde está planteada la ecuación diferencial es $[0, 1]$ y la función incógnita ($y = y(t)$) no está definida si $t \notin [0, 1]$. es decir, expresiones como $y(-0.5)$ ó $y(1.5)$ carecen de sentido. Si se substituye en (2) los valores $t = 0$ y $h = 1/2$ se obtiene

$$y''(0) \simeq \frac{y(1/2) + y(-1/2) - 2y(0)}{h^2}.$$

Que no tiene sentido ya que aparece en ella $y(-1/2)$.

Otra forma de este error es subsituir en la tercera expresión de (1) los valores $t = 0$ y $h = 1/2$, obteniendo

$$y'(0) \simeq \frac{y(1/2) - y(-1/2)}{2h}.$$

Aunque de las tres formas de aproximar la primera derivada, la tercera expresión en (1) sea más precisa, ¡no siempre se puede usar!

Forma correcta: Si usamos la primera expresión de (1) para aproximar $y'(0) = 0$ obtenemos

$$y_1 - y_0 = 0. \tag{4}$$

Si usamos la segunda expresión de (1) para aproximar $y'(1) = 0$ obtenemos

$$y_2 - y_1 = 0. \tag{5}$$

Las ecuaciones (3), (4) y (5) forman un sistema 3×3.