

E.T.S.I. Telecomunicación
Examen Ordinario de Ecuaciones Diferenciales
Junio de 2001

Problema 1.

En un problema de Ingeniería se estudia una determinada magnitud $u(t, x)$ que verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u - f(x),$$

siendo $a > 0$, $b \neq 0$ y $f(x)$ una distribución de fuentes externas.

Cuando se alcanza el estado estacionario, u no depende de t por lo que la parcial respecto de t es nula y las parciales respecto de x se convierten en derivadas ordinarias. Denotando por u' y u'' a las derivadas primera y segunda de u respecto de x , la ecuación anterior puede escribirse

$$u'' - 2au' - b^2 u = f(x) \quad (1.1)$$

En el problema en cuestión se tiene que: a) la ecuación (1.1) se verifica en toda la recta real; b) $f(x)$ es una función escalón que vale 0 fuera de cierto intervalo $[-L, L]$ centrado respecto del origen, en el que $f(x) = k$, una constante; y c) la solución $u(x)$ tiene un comportamiento asintótico definido por

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x) = 0 \quad (1.2)$$

Observe que este comportamiento asintótico es una condición de frontera o de contorno en el infinito.

Cuando el intervalo $[-L, L]$ es muy pequeño la fuente externa puede considerarse puntualmente concentrada en el origen y el problema puede describirse mediante la ecuación diferencial

$$u'' - 2au' - b^2 u = 0 \quad (1.3)$$

válida en $] -\infty, 0[$ y en $]0, +\infty[$, junto con las condiciones:

$$u(x) \text{ continua en } 0 \text{ y } u'_+(0) - u'_-(0) = k. \quad (1.4)$$

- (a) Obtenga la solución general de la ecuación (1.3).
- (b) Obtenga la solución general en $] -\infty, 0[$ y en $]0, +\infty[$ teniendo en cuenta el comportamiento asintótico definido por (1.2).
- (c) Obtenga la solución conjunta que verifica (1.4). Represente gráficamente la solución para $a = 0.5$, $b = 1.2$, $k = -1.44$.

Ahora se considera el problema (1.1) también con valores de $a = 0.5$, $b = 1.2$ y $k = -1.44$, pero con $L = 1$.

- (d) Halle la solución en cada uno de los intervalos $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ y $]1, +\infty[$ por separado (observe que las constantes arbitrarias que aparecen en la solución para cada uno de los intervalos no tienen por qué ser las mismas).
- (e) Determine las constantes arbitrarias de modo que se satisfaga el comportamiento asintótico (1.2) y u sea continua y diferenciable con continuidad en -1 y 1 . Dibuje la solución.
- (f) Para los valores numéricos dados antes del apartado (d), determine una solución aproximada en $[-1, 1]$ por diferencias finitas con $h = 0.5$, si se asumen como válidos los valores $u(-1) = 0.3$ y $u(1) = 0.55$ obtenidos experimentalmente. Compare con los valores obtenidos en (e).

Puntuación: (a) 2p; (b) 1p; (c) 1p; (d) 2p; (e) 2p; (f) 2p.

Problema 2.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

- (a) Resuelva, según los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema homogéneo asociado a (2.1).
- (b) Halle una solución particular del sistema completo (2.1) para $a = 2$.
- (c) Halle la solución del sistema (2.1) para $a = 2$ con la condición inicial $x(0) = y(0) = 0$, $z(0) = 1$.
- (d) Sea B una matriz cuadrada de orden n que cumple $B^{k+1} = 0$ para cierto natural k . Pruebe que las columnas de la matriz

$$M(t) := I + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \cdots + \frac{t^k}{k!}B^k$$

satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales $Y'(t) = BY(t)$. Pruebe que además son linealmente independientes.

- (e) Use el cambio de variables $Y(t) = e^t Z(t)$ en el sistema homogéneo asociado a (2.1) y el apartado anterior (no hace falta haberlo resuelto) para resolver el sistema homogéneo asociado a (2.1).

Puntuación: (a) 3p; (b) 3p; (c) 1p (d) 2p; (e) 1p