

# E.T.S.I. TELECOMUNICACION

## ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen ordinario (y 2) de Julio de 1999.

### PROBLEMA 1.

Considere la ecuación diferencial siguiente:

$$-u'' + u = f(x)$$

donde  $f(x)$  es la función continua a trozos definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 & 0.5 < x < 0.7 \\ 0 & 0.7 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Resuelva el problema de forma analítica, siguiendo los pasos siguientes.
  - Obtenga la solución de la ecuación homogénea.
  - Obtenga la solución de la ecuación no homogénea en cada uno de los subintervalos  $[0, 0.5]$ ,  $]0.5, 0.7[$  y  $[0.7, 1]$  por separado (en términos de constantes arbitrarias).
  - Obtenga  $u(x)$ , es decir, determine las 6 constantes arbitrarias, teniendo en cuenta que  $u$  verifica las condiciones de contorno  $u(0) = u(1) = 0$  y que  $u$  y  $u'$  deben ser continuas en todo el intervalo  $[0, 1]$ .
- Resuelva el problema de contorno por diferencias finitas utilizando como norma de la partición  $h = 0.2$ . Compare con la solución hallada en a)
- Resuelva el problema de contorno por el método de ponderación utilizando como funciones de prueba  $u(x) = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 2\pi x + \gamma \sin 3\pi x$ , y como funciones test las funciones características en los intervalos  $[0, 0.5]$ ,  $[0.5, 0.7]$  y  $[0.7, 1]$ . Compare con la solución hallada en a). (Nota: la función característica sobre un intervalo es aquella que vale 1 dentro del intervalo y 0 fuera de él).

Puntuación: a1) 2p; a2) 2p; a3) 2p; b) 2p; c) 2p.

### PROBLEMA 2.

Sea  $A$  una matriz cuadrada real de orden  $n$ . Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (de coeficientes no constantes):  $t^2 Y'' = AY$ .

- Mediante el cambio  $t = e^z$  pruebe que el sistema anterior se transforma en el sistema de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz} = AY$$

- Suponga que la matriz  $A$  tiene  $n$  valores propios distintos y mayores que  $-1/4$ . Describa la solución del sistema obtenido en a).
- Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} t^2 x'' &= x + y + \log t \\ t^2 y'' &= 3x - y \end{aligned}$$

transfórmelo usando el apartado a) en uno de coeficientes constantes y éste a su vez en uno de primer orden.

- Resuelva el homogéneo asociado del apartado c).
- Halle una solución particular del apartado c).

Puntuación: 1, 2, 2, 3, 2.

# Solución Examen Ecuaciones Diferenciales

Julio de 1999

E.T.S.I. Telecomunicación

## Problema 1

- a. a.1) La homogénea es  $-u'' + u = 0$ . El polinomio característico es  $-\lambda^2 + 1$ , cuyas raíces son  $\lambda = \pm 1$ . Luego la solución general de la homogénea es  $u_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . (Las constantes pueden variar en cada intervalo).
- a.2) En los intervalos  $[0, 0.5]$  y  $[0.7, 1]$  la ecuación es homogénea. Sólo falta hallar una solución particular para el intervalo  $]0.5, 0.7[$ : Como el término independiente es una constante, conjeturamos  $u_p(x) = A$ . Al forzar que  $u_p$  satisfaga la ecuación diferencial no homogénea:  $A = 1$ . Por tanto la solución final es

$$u(x) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-x} & x \in [0, 0.5] \\ C_3 e^x + C_4 e^{-x} + 1 & x \in ]0.5, 0.7[ \\ C_5 e^x + C_6 e^{-x} & x \in [0.7, 1] \end{cases}$$

- a.3) A partir de  $u(0) = 0$  obtenemos  $C_1 + C_2 = 0$ , de  $u(1) = 0$ , se obtiene  $C_5 e + C_6 e^{-1} = 0$ . De la continuidad de  $u$  en los puntos  $0.5, 0.7$  se tiene

$$C_1 e^{0.5} + C_2 e^{-0.5} = C_3 e^{0.5} + C_4 e^{-0.5} + 1$$

$$C_3 e^{0.7} + C_4 e^{-0.7} + 1 = C_5 e^{0.7} + C_6 e^{-0.7}$$

De la continuidad de  $u'$  en los puntos  $0.5, 0.7$  se tiene

$$C_1 e^{0.5} - C_2 e^{-0.5} = C_3 e^{0.5} - C_4 e^{-0.5}$$

$$C_3 e^{0.7} - C_4 e^{-0.7} = C_5 e^{0.7} - C_6 e^{-0.7}$$

Las 6 ecuaciones enmarcadas proporcionan un sistema  $6 \times 6$  compatible determinado.

- b. Usamos  $h = 0.2$  y la fórmula  $u''(x) \simeq \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2}$ . Llamamos  $u_1 = u(0.2)$ ,  $u_2 = u(0.4)$ ,  $u_3 = u(0.6)$ ,  $u_4 = u(0.8)$ . Debido a las condiciones de contorno:  $u_0 = u(0) = 0$ ,  $u_5 = u(1) = 0$ . Obtenemos las ecuaciones:

$$-\left(\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2}\right) + u_i = f(i \cdot 0.2), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema que se puede resolver.

- c. Calculemos el residuo de  $u(x) = \alpha \sin \pi x + \beta \sin 2\pi x + \gamma \sin 3\pi x$ . Variamos un poco la notación para hacerla más compacta:  $u(x) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sin j\pi x$ .

$$R(u(x)) = -u'' + u - f(x) = \sum_{j=1}^3 ((j\pi)^2 + 1) \alpha_j \sin j\pi x - f(x).$$

Multipliquemos escalarmente el residuo por funciones característica: (el producto escalar, al tratarse de un problema planteado en  $[0, 1]$  es  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ ).

$$\begin{aligned} \langle R, \chi_{[a,b]} \rangle &= \int_0^1 R(u(x)) \chi_{[a,b]}(x) dx = \int_a^b R(u(x)) dx = \\ &= \sum_{j=1}^3 ((j\pi)^2 + 1) \alpha_j \int_a^b \sin j\pi x dx - \int_a^b f(x) dx = \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{((j\pi)^2 + 1) \alpha_j}{j\pi} (\cos j\pi a - \cos j\pi b) - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Hemos de igualar a 0 los productos escalares anteriores para los intervalos  $[0, 0.5]$ ,  $[0.5, 0.7]$ ,  $[0.7, 1]$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{(j\pi)^2 + 1}{j\pi} \left( 1 - \cos \frac{j\pi}{2} \right) \alpha_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{(j\pi)^2 + 1}{j\pi} \left( \cos \frac{j\pi}{2} - \cos \frac{7j\pi}{10} \right) \alpha_j &= \int_{0.5}^{0.7} dx = 0.2, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{(j\pi)^2 + 1}{j\pi} \left( \cos \frac{7j\pi}{10} - \cos j\pi \right) \alpha_j &= 0. \end{aligned}$$

Matricialmente se puede poner

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^2+1}{\pi} & \frac{4\pi^2+1}{2\pi} & \frac{9\pi^2+1}{3\pi} \\ \frac{\pi^2+1}{\pi} (-\cos \frac{\pi}{10}) & \frac{4\pi^2+1}{2\pi} (-1 - \cos \frac{2\pi}{10}) & \frac{9\pi^2+1}{3\pi} (-\cos \frac{3\pi}{10}) \\ \frac{\pi^2+1}{\pi} (1 + \cos \frac{\pi}{10}) & \frac{4\pi^2+1}{2\pi} (-1 + \cos \frac{2\pi}{10}) & \frac{9\pi^2+1}{3\pi} (1 + \cos \frac{3\pi}{10}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistema  $3 \times 3$  que se puede resolver.

## Problema 2

a. Al hacer el cambio  $t = e^z$  (o  $z = \log t$ ) se tiene

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dY}{dz},$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dY}{dt} \right) = \frac{1}{t} \frac{d}{dz} \left( e^{-z} \frac{dY}{dz} \right) = \frac{1}{t} \left( -e^{-z} \frac{dY}{dz} + e^{-z} \frac{d^2Y}{dz^2} \right) = \frac{1}{t^2} \left( \frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz} \right).$$

Luego el sistema  $t^2 Y'' = AY$  se transforma en

$$\frac{d^2Y}{dz^2} - \frac{dY}{dz} = AY. \quad (1)$$

b. Conjeturamos como solución de (1),  $Y(z) = e^{\mu z} w$ , donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $w \in \mathbb{R}^n$ . Al forzar que  $Y(z)$  satisfaga (1), tenemos  $\mu^2 e^{\mu z} w - \mu e^{\mu z} w = A e^{\mu z} w$ . Simplificando  $Aw = (\mu^2 - \mu)w$ . Es decir  $\mu^2 - \mu$  ha de ser un valor propio de  $A$  y  $w$  un vector propio asociado. Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $A$  con vector propio asociados, respectivamente,  $v_1, \dots, v_n$ , entonces

$$\mu_i^2 - \mu_i = \lambda_i \Rightarrow \mu_i = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_i}}{2},$$

al tener  $1 + 4\lambda_i > 0$ , entonces  $\mu_i \in \mathbb{R}$ . Y por tanto

$$\exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda_i}}{2} z\right) v_i, \quad \exp\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda_i}}{2} z\right) v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

son soluciones independientes. Como el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión  $2n$ , la solución general del sistema (1) es

$$Y(z) = \sum_{i=1}^n A_i \exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda_i}}{2} z\right) v_i + B_i \exp\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda_i}}{2} z\right) v_i, \quad A_i, B_i \in \mathbb{R}.$$

c. El sistema  $t^2 Y'' = AY + b(t)$  transformado es  $\tilde{Y} - \dot{Y} = AY + b(e^z)$ , en este apartado:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} - \dot{x} &= x + y + z \\ \tilde{y} - \dot{y} &= 3x - y \end{aligned} \right\}$$

Hacemos  $\dot{x} = u$ ,  $\dot{y} = v$ . Tenemos

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{u} &= x + y + u + z \\ \dot{v} &= 3x - y + v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$



- d. El polinomio característico de la matriz es  $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 - 4$ , cuyas raíces son  $\lambda = -1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 1/2 \pm i\sqrt{7}/2$ . Los vectores propios asociados a  $\lambda = -1$  son  $L\{(1, 1, -1, -1)\}$ . Los asociados a  $\lambda = 2$  son  $L\{(1, 1, 2, 2)\}$ . Los asociados a  $\lambda = 1/2 + i\sqrt{7}/2$  son  $L\{(1, -1/3, \lambda, -\lambda/3)\}$ . (No hace falta hallar los vectores propios asociados al conjugado de este valor propio). La matriz es diagonalizable, pues es de orden 4 y tiene 4 valores propios distintos. De los dos valores propios reales obtenemos dos soluciones independientes:

$$Y_1(z) = e^{-z} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2(z) = e^{2z} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Del valor propio complejo  $\lambda = 1/2 + i\sqrt{7}/2$  obtenemos dos soluciones reales independientes. (Se omite la tercera y la cuarta coordenada, pues a la hora de hallar  $x(z)$  e  $y(z)$  son innecesarias).

$$\begin{aligned} e^{\lambda z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ * \\ * \end{pmatrix} &= \\ &= e^{z/2} \left( \cos \frac{\sqrt{7}}{2} z + i \sin \frac{\sqrt{7}}{2} z \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ * \\ * \end{pmatrix} \\ &= e^{z/2} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} z \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ * \\ * \end{pmatrix} + i e^{z/2} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} z \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ * \\ * \end{pmatrix} = \\ &= Y_3(z) + i Y_4(z). \end{aligned}$$

La solución general del sistema homogéneo es

$$\sum_{i=1}^4 C_i Y_i(z), \quad C_i = \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Nos quedamos con la primera y segunda coordenada, y deshacemos el cambio:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \frac{1}{t} + C_2 t^2 + C_3 \sqrt{t} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} \log t + C_4 \sqrt{t} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} \log t, \\ y(t) &= C_1 \frac{1}{t} + C_2 t^2 - \frac{1}{3} C_3 \sqrt{t} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} \log t - \frac{1}{3} C_4 \sqrt{t} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} \log t. \end{aligned}$$

- e. Dado el sistema no homogéneo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix},$$

conjeturamos  $Y_p(z) = a + bz$ , ( $a, b \in \mathbb{R}^4$ ) ya que el término independiente del sistema es un polinomio de grado 1 y el 0 no es valor propio de la matriz. Forzamos que  $Y_p(z)$  satisfaga el sistema:

$$b = A(a + bz) + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = Aa, 0 = Ab + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo los dos sistemas:  $a = (1/4, 0, -1/4, -3/4)^t$ ,  $b = (-1/4, -3/4, 0, 0)^t$ . Nos quedamos sólo con la primera y segunda coordenada y deshacemos el cambio:

$$x_p(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log t, \quad y_p(t) = -\frac{3}{4} \log t.$$