

E.T.S.I. TELECOMUNICACION

ECUACIONES DIFERENCIALES. Examen ordinario de Junio de 1998.

ALGEBRA LINEAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES (primera parte).

PROBLEMA 1.

Una capa límite es una región de un dominio bi o tridimensional en la que se producen cambios rápidos del valor de una variable. Son numerosos los fenómenos físicos en que este comportamiento tiene lugar. De manera ideal el comportamiento de la magnitud puede simularse con un modelo sencillo, pero el efecto de la capa límite no es detectable por dicho modelo. La inclusión en el modelo de los términos necesarios para representar la capa límite es delicada porque intervienen magnitudes con frecuencia en una escala de orden diferente. Consideremos aquí un problema unidimensional. El comportamiento ideal viene descrito por

$$y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(1) = 1 \quad (1)$$

Y el problema de contorno siguiente incorpora el efecto de la capa límite

$$\epsilon y'' + y' + y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, y(1) = 1 \quad (2)$$

donde ϵ es una magnitud positiva pero muy pequeña.

- Resuelva el problema ideal (1) de forma analítica y dibuje la solución. ¿Satisface ésta las condiciones de contorno del problema completo (2)? ¿Dónde se localiza la capa límite?
- Resuelva ahora también de forma analítica el problema completo (2) para ϵ arbitrario.
- Obtenga la solución correspondiente a $\epsilon = 0.1$ y compárela con la solución del apartado a) en los puntos 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1. ¿Para cuáles de estos valores la diferencia entre ambas es menor que 0.05?
- Resuelva el problema (2) para $\epsilon = 0.1$ mediante diferencias finitas tomando $h = 0.2$. ¿Se captura el comportamiento cerca del 0? Interprete este hecho y sugiera alguna mejora.
- También con $\epsilon = 0.1$, resuelva el problema mediante el método de colocación utilizando como puntos de colocación $x = 1/3$ y $x = 2/3$. Utilice como espacio de aproximación el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 que satisfacen las condiciones de contorno. Observe que estos polinomios son de la forma $x + \alpha(x - x^2) + \beta(x - x^3)$. ¿Puede sugerir alguna mejora?

Puntuación: a) 2 puntos, b) 2 puntos, c) 1 puntos, d) 3 puntos, e) 2 puntos.

PROBLEMA 2.

- Resuelva el sistema
$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$
- Obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas solución de a). (Sugerencia: exprese la solución en la forma $F(x,y) = K$ eliminando la t en la solución de a)).
- Resuelva, para $\alpha = 1$, el sistema
$$\begin{cases} x' = 3x + y + t \\ y' = -x + y + 1 + e^{\alpha t} \end{cases}$$
- Del sistema planteado en c), para $\alpha = 0$, se puede obtener (derivando la primera ecuación y utilizando la segunda) $x'' = 4x' - 4x + 3 - t$. Resuelva esta ecuación de dos modos diferentes:
 - De la manera usual, es decir, mediante el polinomio característico.
 - Observando que $x(t) = e^{2t}$ verifica la homogénea y por reducción del orden.

Puntuación: a) 2 puntos, b) 2 puntos, c) 3 puntos, e) 3 puntos.

PROBLEMA 2

a) Matricialmente el sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = AY.$$

Los valores y vectores propios de A que aparece son

$$\begin{aligned} 2 &\Rightarrow L\{(1, 1)\} \\ 4 &\Rightarrow L\{(1, -1)\} \end{aligned}$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} \\ y(t) &= C_1 e^{2t} - C_2 e^{4t} \end{aligned}$$

b) Sumando y restando tenemos

$$\begin{aligned} x(t) + y(t) &= 2C_1 e^{2t} \\ x(t) - y(t) &= 2C_2 e^{4t} \end{aligned}$$

De donde

$$(x + y)^2 = 4C_1^2 e^{4t} = 4C_1^2 \frac{x - y}{2C_2} = K(x - y).$$

Obtengamos la ecuación diferencial de esta familia de curvas: Despejamos K y derivamos:

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{(x + y)^2}{x - y} \right) = \frac{2(x + y)(1 + y')(x - y) - (x + y)^2(1 - y')}{(x - y)^2}$$

Simplificamos: $x - 3y = y'(y - 3x)$. Por lo que la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$x - 3y = -\frac{1}{y'}(y - 3x).$$

Al despejar y' se observa que es homogénea (La ecuación anterior se puede resolver de otra manera observando que es exacta):

$$y' = \frac{3x - y}{x - 3y} = \frac{3 - \frac{y}{x}}{1 - 3\frac{y}{x}}.$$

Hacemos el cambio $u = \frac{y}{x}$, obtenemos

$$u'x + u = \frac{3-u}{1+3u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{-3u^2 - 2u + 3}{1+3u} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{(1+3u)du}{-3u^2 - 2u + 3}.$$

Ecuación separable. Si $F(u)$ denota una primitiva de $\frac{1+3u}{-3u^2-2u+3}$, entonces $F(u) = K + \log x$. Las trayectorias ortogonales son:

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + K.$$

NOTA: Este problema se puede resolver de otra manera diferente: Obtenemos la ecuación diferencial de la solución sin usar la variable t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{-x+3y}{3x-y}.$$

Y la resolución continúa como antes.

c) Matricialmente el sistema es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y' = AY + u_0 + tu_1 + e^t u_2.$$

Hallemos la solución de la homogénea: La matriz A sólo tiene un valor propio: $\lambda = 2$ (con multiplicidad algebraica 2). El conjunto de vectores propios es $L\{(1, -1)\}$. A no es diagonalizable, por lo que hay que hallar su forma canónica de Jordan: $A = SJS^{-1}$

$$S = [v_1, v_2], \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De $AS = SJ$ obtenemos $Av_1 = 2v_1$, $Av_2 = v_1 + 2v_2$. Por tanto $v_1 = (1, -1)$ y una solución del sistema de v_2 es, por ejemplo, $v_2 = (1, 0)$ (Este sistema es indeterminado). Luego $\{(1, -1), (1, 0)\}$ forma una cadena de Jordan asociada al valor propio 2. Una base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es:

$$\left\{ e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Conjeturamos como solución particular $Y_p = w_0 + tw_1 + e^t w_2$, forzamos que cumpla la ecuación no homogénea:

$$w_1 + e^t w_2 = Aw_0 + tAw_1 + e^t Aw_2 + u_0 + tu_1 + e^t u_2,$$

igualando términos:

$$w_1 = Aw_0 + u_0, \quad 0 = Aw_1 + u_1, \quad w_2 = Aw_2 + u_2.$$

Resolviendo estos 3 sistemas 2×2 , una solución particular es

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La solución general es la solución de la homogénea más la solución de la particular:

$$C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left(e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

d1) El polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. La única raíz es $\lambda = 2$ (doble). Por lo tanto $\{e^{2t}, te^{2t}\}$ forma una base del conjunto de soluciones de la homogénea. Conjeturamos para la particular $x_p(t) = A + Bt$. Forzamos que x_p verifique la no homogénea, e igualamos términos semejantes:

$$0 = 4B - 4A - 4Bt + 3 - t \Rightarrow \begin{cases} 0 &= 4B - 4A + 3 \\ 0 &= -4B - 1 \end{cases}$$

Obtenemos $A = 1/2$, $B = -1/4$. La solución general es:

$$C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

d2) Forzamos que $x(t) = e^{2t}v(t)$ satisfaga la ecuación diferencial no homogénea:

$$4e^{2t}v + 4e^{2t}v' + e^{2t}v'' = 4(2e^{2t} + e^{2t}v') - 4e^{2t}v + 3 - t,$$

simplificando tenemos $e^{2t}v'' = 3 - t$, de donde $v'' = e^{-2t}(3 - t)$. Al integrar dos veces se tiene (¡No olvide las constantes de integración!)

$$v(t) = \frac{e^{-2t}(2 - t)}{4} + C_1t + C_2$$

Como $x(t) = e^{2t}v(t)$, la solución general de la ecuación es:

$$x(t) = \frac{2 - t}{4} + C_1te^{2t} + C_2e^{2t},$$

que se observa que coincide con la solución obtenida previamente.