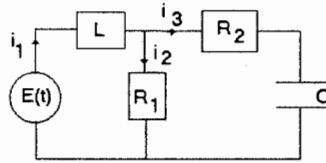


E.T.S.I. TELECOMUNICACION
Examen de ECUACIONES DIFERENCIALES
Junio de 2005

Problema 1

Considere la red eléctrica de la figura:



Se puede demostrar que las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ satisfacen el siguiente sistema:

$$L \frac{di_2}{dt} + L \frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t) \quad (1.a)$$

$$-R_1 \frac{di_2}{dt} + R_2 \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C} i_3 = 0, \quad (1.b)$$

siendo C, L, R_1 y R_2 constantes estrictamente positivas e $i_1 = i_2 + i_3$.

- a) Si se considera sólo el subcircuito de la izquierda, únicamente se tiene que estudiar la ecuación (1.a) para $i_3 = 0$; es decir, $L \frac{di_2}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$. Resuelva esta ecuación

tomando como $E(t) = E_0$, donde E_0 es una constante positiva (circuito con una fuente de alimentación de corriente continua).

- b) Demuestre que el sistema (1) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{L(R_1 + R_2)} \begin{pmatrix} -R_1 R_2 & L/C \\ -R_1^2 & -L/C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{L(R_1 + R_2)} \begin{pmatrix} R_2 E(t) \\ R_1 E(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

A partir de ahora tome $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L = 0.5H$ y $C = 0.5F$. (Observe que estos datos no son físicamente realistas -por ejemplo el orden de C para los condensadores es de pico o nanofaradios- pero permiten la solución a mano del problema).

- c) Resuelva el sistema homogéneo asociado a (2).
d) Si $E(t) = \cos t$ (fuente de alimentación periódica también de frecuencia nada realista), halle una solución particular del sistema (2).
e) Halle la solución del sistema (2) cuando $i_2(0) = i_3(0) = 0$, si la excitación $E(t)$ viene ahora dada por

$$E(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases}$$

Puntuación: a) 2p, b) 2p, c) 2p, d) 2p, e) 2p

Problema 2

Considere una línea de transmisión de corriente continua que está alimentada en uno de sus extremos (el emisor) por una fuente de potencial constante y está abierta por el otro extremo (el receptor). Además, experimenta pérdidas de potencial, $v(x)$, debido a la resistividad, $r(x)$, del material conductor y pérdidas de corriente, $i(x)$, debido a la inductancia del medio, $g(x)$. Las ecuaciones clásicas del telégrafo en estado estacionario permiten modelar tales pérdidas (considerando solo las frecuencias bajas) mediante

$$\frac{dv}{dx} = -ri \quad \text{y} \quad \frac{di}{dx} = -gv$$

Derivando y teniendo en cuenta que $r(x)$ y $g(x)$ son funciones estrictamente positivas, se obtiene, en términos de solo el potencial v , la ecuación de segundo orden

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dx} \right) + gv = 0.$$

a) Obtenga esta ecuación.

Suponga que el extremo emisor está en $x = L$, donde la condición de contorno, de tipo esencial, es

$$v(L) = v_L$$

y que en el extremo receptor, en $x = 0$, se cumple la condición de circuito abierto, es decir, intensidad nula, por lo que la condición de contorno es de Neuman homogénea

$$i(0) = -\frac{1}{r} \frac{dv}{dx}(0) = 0$$

b) Resuelva analíticamente el problema de frontera, suponiendo r y g constantes.

Considere a partir de ahora el mismo problema,

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r(x)} \frac{dv}{dx} \right) + g(x)v = 0 \quad \text{en }]0,2[, \quad \frac{dv}{dx}(0) = 0, \quad v(2) = 1,$$

aunque con unos datos menos ideales. Por simplicidad, supondremos aquí simplemente que la función $g(x)$ es discontinua:

$$g(x) = \begin{cases} 0.64 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

c) Resuelva el problema de forma analítica, siguiendo los pasos siguientes.

c1) Obtenga la solución de la ecuación diferencial en cada uno de los subintervalos $]0,1[$ y $]1,2[$ por separado (en términos de constantes arbitrarias).

c2) Obtenga $v(x)$. Para ello, determine las 4 constantes arbitrarias, teniendo en cuenta las condiciones de contorno que verifica v y también que v y dv/dx deben ser continuas en todo el intervalo $[0,2]$.

d) Resuelva el problema de contorno por diferencias finitas utilizando como norma de la partición $h = 0.4$. Compare con la solución hallada en b).

e) Resuelva el problema de contorno por el método de colocación utilizando como función de prueba $v(x) = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4$, que satisface las condiciones de contorno si $\alpha + 4\beta + 16\gamma = 1$, y como puntos de colocación $x = 0.5$ y $x = 1.5$. Compare con las soluciones halladas en b) y c).

Puntuación: a) 1p, b) 2p, c) 3p, d) 2p, e) 2p.