

Examen extraordinario de Septiembre 1998.

Ecuaciones Diferenciales

Algebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales (Plan viejo)

1. Considere la siguiente ecuación: $Ex^2y'' + Fxy' + Gy = 0$.
 - a) ¿Qué relación deben tener los coeficientes constantes E , F y G para que las funciones x^α , x^β verifiquen la ecuación? ($\alpha \neq \beta$, α, β no nulos)
 - b) Resuelva el siguiente problema de contorno:

$$4x^2y'' + 5y = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$y'(4) = 2$$
 - c) Halle una solución aproximada del problema planteado en b) usando el método de colocación en los puntos 2 y 3 usando los polinomios de grado menor o igual que 3. Nota: estos polinomios son de la forma $2x - 2 + \alpha(7 - 8x + x^2) + \beta(47 - 48x + x^3)$.
 - d) Halle una solución aproximada del problema planteado en b) usando diferencias finitas tomando $h = 1$. Compare las soluciones obtenidas en b), c) y d).
 - e) Suponga que la función $y(x) = x^\alpha$ es solución de $Ex^2y'' + Fxy' + Gy = 0$. Halle otra solución independiente en función de α , E , F y G .

Puntuación: 2, 2, 2, 2, 2.

2. Considere el problema diferencial

$$y_1'' + y_2' + y_1 = e^t$$

$$y_2'' + y_1' = t + e^t$$

- a) Transfórmelo en un sistema de orden uno equivalente.
- b) Obtenga la solución general del sistema homogéneo hallado en a)
- c) Obtenga la solución general del sistema completo.
- d) Resuelva el problema de valor inicial cuando la condición inicial viene dada por

$$y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$$

Puntuación: 2, 3, 3, 2.

1.a) Substituyendo x^α en la ecuación $Ex^2y'' + Fxy' + Gy = 0$ tenemos

$$E\alpha(\alpha - 1)x^\alpha + F\alpha x^\alpha + Gx^\alpha = 0,$$

de donde $E\alpha(\alpha - 1) + F\alpha = -G$. Análogamente $E\beta(\beta - 1) + F\beta = -G$. Esto es un sistema compatible determinado, cuya solución es

$$E = \frac{G}{\alpha\beta}, \quad F = \frac{G(1 - \alpha - \beta)}{\alpha\beta}.$$

1.b) Tras el cambio $x = e^t$, la ecuación de Euler se convierte en $4\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$ (Los puntos denotan derivación con respecto a t). Las raíces del polinomio característico $(4\lambda^2 - 4\lambda + 5)$ son $\frac{1}{2} \pm i$. La solución es $y(t) = C_1 e^{t/2} \cos t + C_2 e^{t/2} \sin t$, deshaciendo el cambio $y(x) = C_1 \sqrt{x} \cos \log x + C_2 \sqrt{x} \sin \log x$. Imponiendo las condiciones de contorno la solución es

$$y(x) = C_2 \sqrt{x} \sin \log x, \quad C_2 = \frac{1}{8} \sin \log 2 + \frac{1}{4} \cos \log 2.$$

1.c) Substituyendo $p(x) = 2x - 2 + \alpha(7 - 8x + x^2) + \beta(47 - 48x + x^3)$ en la ecuación diferencial:

$$R(x) = 4x^2 p'' + 5p = 4x^2 [2\alpha + 6\beta x] + 5[2x - 2 + \alpha(7 - 8x + x^2) + \beta(47 - 48x + x^3)],$$

El método de colocación en los puntos 2, 3 obliga a hacer nulo $R(x)$ en dichos puntos:

$$\begin{aligned} 0 = R(2) &= 7\alpha - 13\beta + 10 \\ 0 = R(3) &= 2(16\alpha + 149\beta + 10) \end{aligned} \implies \alpha = -\frac{180}{139}, \quad \beta = \frac{10}{139}$$

1.d) Utilizamos $y''(x) \simeq y(x+1) + y(x-1) - 2y(x)$ cuando $x = 2, 3$, y $y'(x) \simeq y(x) - y(x-1)$ en $x = 4$ junto las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^2 [y(3) + y(1) - 2y(2)] + 5y(2) &= 0 \\ 4 \cdot 3^2 [y(4) + y(2) - 2y(3)] + 5y(3) &= 0 \implies \\ y'(4) &= y(4) - y(3) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{pmatrix} -11 & 8 & 0 \\ 36 & -67 & 36 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sistema de ecuaciones lineales que puede resolverse, obteniéndose valores aproximados para $y(2), y(3), y(4)$.

1.e) Sea $s(x) = x^\alpha$ solución de $Ex^2y'' + Fxy' + Gy = 0$. Hacemos el cambio $y(x) = v(x)s(x)$. Forzamos que y satisfaga la ecuación:

$$v[Ex^2s'' + Fxs' + Gs] + Ex^2v''s + v'(2Ex^2s' + Fxs) = 0.$$

Como s satisface la ecuación, el corchete es nulo, por lo que queda, llamando $u = v'$,

$$\frac{du}{u} = -\left(\frac{2s'}{s} + \frac{F}{Ex}\right) dx,$$

integrando (sin poner la constante de integración, pues sólo buscamos otra solución independiente de s):

$$\log u = -2\log s - \frac{F}{E}\log x = \log(x^{-F/E}s^{-2}) = \log x^{-(\frac{F}{E}+2\alpha)},$$

de donde

$$v = \int u = \frac{1}{-\frac{F}{E} - 2\alpha + 1} x^{-F/E - 2\alpha + 1},$$

Por tanto otra solución independiente es $x^{-\frac{F}{E} - \alpha + 1}$.

2.a) Haciendo $y'_1 = y_3$, $y'_2 = y_4$ tenemos

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_3 \\ y'_2 &= y_4 \\ y'_3 &= -y_4 - y_1 + e^t \\ y'_4 &= -y_3 + t + e^t \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.b) El polinomio característico es λ^4 . 0 es el único valor propio y se puede comprobar que los vectores propios son $L\{(0, 1, 0, 0)\}$. Calculemos la forma de Jordan de A :

$$S = [v_1, v_2, v_3, v_4], \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AS = SJ,$$

de donde $Av_1 = 0$, $Av_2 = v_1$, $Av_3 = v_2$, $Av_4 = v_3$. Podemos resolver estos sistemas (compatibles indeterminados) y encontrar una solución, que es, por ejemplo

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto las funciones

de donde $Av_1 = 0$, $Av_2 = v_1$, $Av_3 = v_2$, $Av_4 = v_3$. Podemos resolver estos

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes de la homogénea. La solución general del homogéneo es $\sum_{j=1}^4 C_j Y_j$.

2.c) Conjeturamos como solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la función $Y_{p2}(t) = \tilde{a}e^t$. Forzamos que verifique el sistema $Y' = AY + \tilde{u}e^t$:

$$\tilde{a}e^t = A\tilde{a}e^t + \tilde{u}e^t \Rightarrow (A - I)\tilde{a} = -\tilde{u} \Rightarrow \tilde{a} = (0, 1, 0, 1)^t.$$

Hallems una solución de

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mediante variación de parámetros: Sea

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -t & 1 - \frac{t^2}{2} \\ 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -t \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix},$$

forzamos que $Y_{p1}(t) = M(t)C(t)$ cumpla el sistema $Y' = AY + t\vec{w}$:

$$M'C + MC' = AMC + t\vec{w} \Rightarrow C' = M^{-1}t\vec{w},$$

efectuando las operaciones e integrando obtenemos (se omite la constante de integración ya que nos basta encontrar una particular)

$$Y_{p1}(t) = M(t)C(t) = \left(\frac{t^4}{24}, \frac{t^3(20 - t^2)}{110}, \frac{t^3}{6}, \frac{t^2(12 - t^2)}{24} \right)^t.$$

La solución general del sistema es

$$\sum_{j=1}^4 C_j Y_j(t) + Y_{p1}(t) + Y_{p2}(t), \quad C_j \in \mathbb{R}.$$

2.d) Sabemos $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = y_1'(0) = 1, y_2'(0) = y_4(0) = 0$. Por lo que al usar la solución general obtenida en c):

$$\sum_{j=1}^4 C_j Y_j(0) + Y_{p1}(0) + Y_{p2}(0) = (0, 0, 1, 1)^t,$$

simplificamos y resolvemos el sistema para hallar $C_j, j = 1, \dots, 4$, se obtiene $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Por lo que la solución del problema de valor inicial se reduce a $Y_{p1}(t) + Y_{p2}(t)$.