

E.T.S.I.TELECOMUNICACION

ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen extraordinario. Septiembre de 2002.

PROBLEMA 1.

Cuando se estudia la ecuación del calor en una placa circular surge una ecuación en derivadas parciales, cuya resolución obliga a resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 g}{d^2 \theta} - Kg = 0, \quad (1) \quad r^2 \frac{d^2 f}{d^2 r} + r \frac{df}{dr} + Kf = 0, \quad (2)$$

donde f es una función que sólo depende de r (la distancia al centro), g es otra función que depende sólo de θ (el ángulo polar) y K es una constante real.

- a) Halle la solución general de (1) teniendo en cuenta los casos posibles de la constante K real.
- b) Halle la solución general de (2).
- c) Debido al significado físico de las funciones f y g , se debe exigir que g es una función 2π periódica (esto es $g(0) = g(2\pi)$ y $g'(0) = g'(2\pi)$) y que f sea continua en el origen ($r = 0$). De las soluciones obtenidas en a) y en b), ¿cuáles cumplen simultáneamente estas dos condiciones?
- d) Resuelva de forma exacta el siguiente problema de frontera:

$$\frac{d^2 g}{d^2 \theta} - g = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g'(2\pi) = 0.$$

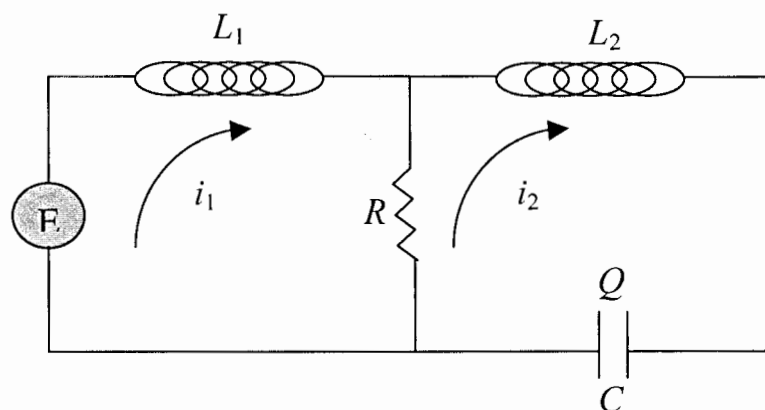
- e) Use como función aproximante un polinomio de grado 3 que satisfaga las condiciones de contorno y mediante el método de colocación en los puntos $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$, halle una solución aproximada al problema planteado en d).

PUNTUACIÓN: a) 2p, b) 3p, c) 1p, d) 1p, e) 2p.

PROBLEMA 2 AL DORSO

PROBLEMA 2.

Se quiere construir un dispositivo que tenga alguna capacidad oscilatoria (aunque no sea pura, es decir, aunque sea amortiguada) utilizando los dos circuitos acoplados de la figura, siendo la fuente de alimentación de corriente continua.



Estos circuitos se modelan mediante el par de ecuaciones diferenciales:

$$L_1 i_1' + R(i_1 - i_2) = E(t)$$

$$L_2 i_2' + R(i_2 - i_1) + \frac{Q}{C} = 0$$

Además, hay que observar que $i_2 = Q'$. La notación puede verse en la figura.

- Si $L_2 = 0$, ¿qué deberá cumplir C en términos de L_1 y R para que el dispositivo sea oscilante. (Sugerencia: Escriba el sistema en función de i_1 y Q y razone sobre las raíces del polinomio característico). ¿En algún caso se trata de una oscilación pura?
- Considere los valores $L_1 = 20\text{H}$, $L_2 = 0\text{H}$, $R = 10\Omega$, $C = 0.05\text{F}$. ¿Es oscilante el dispositivo? Considere, además, $E(t) = 20\text{V}$ y la condición inicial $i_1(0) = 0\text{A}$, $Q(0) = 10\text{C}$. Resuelva el problema numéricamente.
- Suponga ahora que sí se considera la bobina del circuito de la derecha, de inductancia $L_2 > 0$. Escriba el sistema matricialmente de la forma $Y' = MY + G$, siendo $Y = (i_1, i_2, Q)^t$. Obtenga el polinomio característico $p(\lambda)$ de la matriz M .
- Compruebe que $-R/L_1$ es una raíz de $p(\lambda)$. Halle las otras dos raíces. Pruebe que las raíces reales de $p(\lambda)$ son negativas y las complejas, si las tiene, tienen parte real negativa. Explique tal hecho en términos físicos. ¿Para qué valores de L_2 se conseguirá el objetivo de que la solución tenga algún carácter oscilante?
- Con los valores del apartado b), ¿para qué valores de L_2 existe oscilación? ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación en términos de L_2 ? ¿Cuál es la frecuencia máxima posible y para qué valor de L_2 se obtiene?

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada apartado.