

E.T.S.I. TELECOMUNICACIÓN
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEPTIEMBRE 2005

PROBLEMA 1

La ecuación diferencial que modela la vibración de una cuerda de longitud L (y de otros sistemas vibrantes unidimensionales) es

$$T y'' + R \omega^2 y = 0, \quad (1)$$

donde $y(x)$ es el desplazamiento de la cuerda respecto de la posición de equilibrio, T y R son constantes que dependen de la cuerda y ω es la velocidad angular constante con la que gira la cuerda. Considere que $T, R, \omega > 0$.

- a) Resuelva la ecuación diferencial (1).
- b) Si la cuerda está fija en los extremos, es decir

$$y(0) = 0, y(L) = 0, \quad (2)$$

determine la relación que debe haber entre L, T, R y ω para que el problema de frontera (1)+(2) tenga solución no nula.

- c) Si se supone que interviene cierto tipo de fuerzas externas, hay que modificar la ecuación (1). Resuelva la ecuación diferencial

$$T y'' + R \omega^2 y = g, \quad (3)$$

donde g es una constante positiva.

- d) En este apartado tome los valores $T = R = \omega = 1, L = 2, g = 9.8$. Use el método de diferencias finitas para resolver de forma aproximada el problema de frontera (2)+(3) usando $h = 1$.
- e) De nuevo en este apartado tome los valores $T = R = \omega = 1, L = 2, g = 9.8$. Encuentre la función de la forma $y(x) = ax(x - 2)$ que mejor aproxima a la solución de (2)+(3) por el método de colocación tomando como "punto test" $x = 1$.
- f) Cuando la magnitud de la tensión T no es constante, la ecuación (1) debe modificarse a la siguiente:

$$(T(x) y')' + R \omega^2 y = 0. \quad (4)$$

Suponga que $T(x) = x^2$ y que $0 < x$. Resuelva la ecuación diferencial (4) para $R = 1, \omega = 0.5$ y también para $R = \omega = 1$.

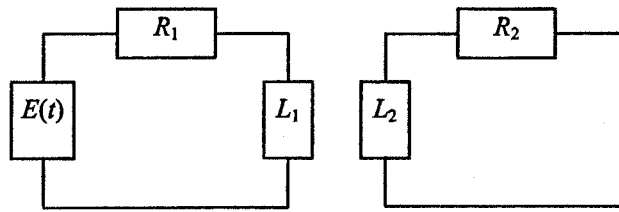
$a) R=1; \omega=0.5;$

$b) R=1; \omega=1;$

PUNTUACIÓN: a) 2, b) 2, c) 1, d) 2, e) 2, f) 1.

PROBLEMA 2

Se tienen los dos circuitos acoplados



Las ecuaciones diferenciales que modelan el circuito son

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} = E(t)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

donde $E(t)$ es la fuerza electromotriz.

- Obtenga el sistema equivalente al anterior con las derivadas despejadas de forma explícita.
- Obtenga las intensidades suponiendo que $R_1 = 5$ ohmios, $L_1 = 1$ henrio, $R_2 = 10$ ohmios, $L_2 = 2$ henrios, la inductancia mutua es $M = 0$, $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$ y $E(t) = e^{-t}$.
- Resuelva el sistema homogéneo asociado al apartado a) con $M = 1$ y con R_1 , R_2 , L_1 , y L_2 del apartado b).
- Encuentre la solución del sistema anterior con $E(t) = \cos(10t)$, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.
- Resuelva el mismo sistema con $E(t) = e^{-10t} \cos(10t)$. Compruebe que la solución tiene el comportamiento adecuado a largo plazo.

Puntuación: a) 1, b) 3, c) 2, d) 2, e) 2