

Examen de Ecuaciones Diferenciales.

E. T. S. I. Telecomunicación. Septiembre de 2001

Problema 1. Un circuito LC oscila de modo forzado en el intervalo temporal $[0, T]$ de acuerdo con

$$x'' + \omega^2 x = F_0 \cos(\gamma t), \quad t \in]0, T[, \quad (1)$$

donde $x(t)$ es la intensidad en el instante t y γ, ω y F_0 son constantes reales positivas no nulas.

- (a) Halle la solución general de la ecuación homogénea asociada a (1).
- (b) Halle, según los diferentes valores de γ y ω , una solución particular de (1).
- (c) Considérese la ecuación diferencial (1) junto con las condiciones de contorno $x'(0) = x'(T) = 0$. Sea $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_{n-1} = (n-1)h, t_n = nh = T$ una división del intervalo y sean $x_k \simeq x(t_k)$ los valores aproximados de la solución del problema de contorno considerado. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x_0, x_1, \dots, x_n mediante diferencias finitas. Expréselo de forma matricial.
- (d) Otra perspectiva para el estudio de la ecuación homogénea asociada a (1) es la siguiente: Considere el cambio $x' = y$, entonces

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y,$$

por lo que la ecuación homogénea asociada a (1) se convierte en $\frac{dy}{dx} y + \omega^2 x = 0$.

- (d.1) Resuelva esta última ecuación diferencial de primer orden.
- (d.2) Halle las trayectorias ortogonales correspondientes a la familia de curvas obtenidas en (d.1).
- (a) La ecuación homogénea es $x'' + \omega^2 x = 0$. El polinomio característico es $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = \pm i\omega$. La solución general de la homogénea es $x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$, donde C_1, C_2 son constantes reales arbitrarias.
- (b) Distinguiremos dos casos $\omega \neq \gamma$ (Caso 1) y $\omega = \gamma$ (Caso 2):

Caso 1: Se conjetura $x_p(t) = A \cos(\gamma t) + B \sin(\gamma t)$, donde A, B son constantes que se hallan forzando que x_p satisfaga la ecuación completa:

$$-A\gamma^2 \cos(\gamma t) - B\gamma^2 \sin(\gamma t) + A\omega^2 \cos(\gamma t) + B\omega^2 \sin(\gamma t) = F_0 \cos(\omega t),$$

igualando coeficientes:

$$\left. \begin{array}{l} -A\gamma^2 + A\omega^2 = F_0 \\ -B\gamma^2 + B\omega^2 = 0 \end{array} \right\} \implies (\gamma \neq \omega) \implies A = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}; \quad B = 0.$$

Caso 2: Se conjetura $x_p(t) = (A + Bt) \cos(\gamma t) + (C + Dt) \sin(\gamma t) = f(t) + tg(t)$, donde A, B, C, D son constantes que se hallan forzando que x_p satisfaga la ecuación completa (obsérvese que f y g cumplen la ecuación homogénea).

$$F_0 \cos(\gamma t) = x_p'' + x_p = (f'' + 2g' + tg'') + (f + tg) = 2g' = 2(-B \sin(\gamma t) + D \cos(\gamma t)).$$

Al igualar coeficientes, A y C pueden ser cualesquiera; tomamos valores nulos y $B = 0$, $D = F_0/2$. Luego $x_p(t) = \frac{F_0}{2}t \sin(\gamma t)$.

(c) La discretización es:

En el nodo $t = 0$:

$$0 = x'(0) \simeq \frac{x(h) - x(0)}{h} \Rightarrow \boxed{x_1 - x_0 = 0}$$

En el nodo $t = h$:

$$F_0 \cos(\gamma h) = x''(h) + \omega^2 x(h) \simeq \frac{x(2h) - 2x(h) + x(0)}{h^2} + \omega^2 x(h) \Rightarrow$$

$$\boxed{F_0 \cos(\gamma h) = \frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{h^2} + \omega^2 x_1}$$

De forma análoga, en el nodo $t = 2h$:

$$\boxed{F_0 \cos(2\gamma h) = \frac{x_3 - 2x_2 + x_1}{h^2} + \omega^2 x_2}$$

...

En el nodo $t = (n-1)h$:

$$\boxed{F_0 \cos(\gamma h) = \frac{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}{h^2} + \omega^2 x_{n-1}}$$

Y en el nodo $t = nh = T$:

$$0 = x'(T) \simeq \frac{x(nh) - x((n-1)h)}{h} \Rightarrow \boxed{x_n - x_{n-1} = 0}$$

Puesto de forma matricial, llamando $\alpha := 1/h^2$; $\beta := \omega^2 - 2/h^2$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \cos(\gamma h) \\ F_0 \cos(2\gamma h) \\ \dots \\ F_0 \cos((n-1)\gamma h) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) (d.1) La ecuación $\frac{dy}{dx}y + \omega^2 x = 0$ es de variables separables: $ydy = -\omega^2 x dx$. Integrando a ambos lados: $y^2/2 = -\omega^2 x^2/2 + C$, donde C es una constante real.

(d.2) La ecuación diferencial de la familia dada es $\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y}$. La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{-\omega^2 x/y} = \frac{y}{\omega^2 x}$. Que de nuevo es separable: $\frac{dy}{y} = \frac{1}{\omega^2} \frac{dx}{x}$, integrando a ambos lados: $\log y = \frac{1}{\omega^2} \log x + C = \log(Kx^{1/\omega^2})$; es decir $y = Kx^{1/\omega^2}$. Donde K es otra constante real.

Problema 2. Considere la ecuación diferencial de cuarto orden $y^{iv} + y'' = 1$.

(a) Transforme la ecuación diferencial dada a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

En el resto de los apartados utilice únicamente teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales.

(b) Obtenga la solución del sistema homogéneo.

(c) Obtenga una solución particular del sistema no homogéneo.

(d) Obtenga la solución del sistema no homogéneo con las siguientes condiciones iniciales.
 $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = -1$.

(a) Mediante $y_1 = y; y_2 = y'; y_3 = y''; y_4 = y'''$, obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' + y_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; Y' = AY + B.$$

(b) Los valores propios son $\lambda = 0$ (doble) y $\lambda = \pm i$. Los vectores propios asociados a $\lambda = 0$ son múltiplos de $(1, 0, 0, 0)$; luego A no es diagonalizable, puesto que la m.a. de $\lambda = 0$ es 2 y la m.g. es 1. Un vector propio asociado a $\lambda = i$ es $(1, i, -1, -i)$ y uno asociado a $\lambda = -i$ es el conjugado del anterior, es decir $(1, -i, -1, i)$. La forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

y existe una matriz invertible $S = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ tal que $AS = SJ$. De donde $Av_1 = 0$; $Av_2 = v_1$; $Av_3 = iv_3$, $Av_4 = -iv_4$. Los vectores v_1, v_3, v_4 ya están hallados (¿por qué?). Una posible solución para v_2 es $(0, 1, 0, 0)$. Además $\{v_1, v_2\}$ forman una cadena de Jordan asociada al valor propio 0. Luego

$$Y_1(t) = e^{0t}v_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Y_2(t) = e^{0t}(v_2 + tv_1) = v_2 + tv_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$e^{it}v_3 = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = Y_3(t) + iY_4(t)$$

son 4 soluciones independientes de la homogénea, de orden 4, luego la solución general es $Y(t) = \sum_{i=1}^4 C_i Y_i(t)$, donde C_1, \dots, C_4 son constantes reales. Como sólo nos interesa la primera coordenada (la incógnita es $y(t)$), la solución general de la homogénea es

$$y(t) = C_1 + tC_2 + C_3 \cos t + C_4 \sin t; \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

- (c) Conjeturamos como particular $Y_p(t) = a + bt + ct^2$ donde a, b, c son vectores de orden 4; ya que el término independiente, B , es un polinomio de grado 0 y el valor propio 0 es doble.

Forzamos que Y_p satisfaga la completa: $b + 2ct = Aa + Abt + Act^2 + B$. Igualamos grados:

$$b = Aa + B, \quad 2c = Ab, \quad 0 = Ac.$$

Hemos de conseguir una solución. Téngase en cuenta que A es una matriz no invertible (ya que 0 es un valor propio. De $Ac = 0$ obtenemos que c es un vector propio asociado a 0; es decir $c = (\alpha, 0, 0, 0)$. De $2c = Ab$, obtenemos $b = (\beta, 2\alpha, 0, 0)$. Si queremos que $b = Aa + B$ sea compatible, entonces $\alpha = 1/2$ y $a = (\gamma, \beta, 1)$. Como sólo nos interesa una solución y ya no hay más sistemas que estudiar, obtenemos la solución particular

$$Y_p(t) = a + bt + ct^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^2.$$

Como la incógnita original, $y(t)$, corresponde a la primera coordenada de $Y(t)$, una solución particular para el problema original es $y_p(t) = t^2/2$.

- (d) La solución general es la general del homogéneo asociado más una particular; es decir

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde C_1, \dots, C_4 son constantes reales que se determinan con las condiciones iniciales:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resolviendo el sistema (compatible determinado), $C_1 = 0, C_2 = -1, C_3 = 0, C_4 = 1$. Por tanto la solución es, quedándonos como siempre con la primera coordenada,

$$y(t) = -t + \sin t + \frac{t^2}{2}.$$